4.6 Дифференцирование обобщённых функций.

Для определения действия функционала $f'(x)$ на пробные функции рассмотрим случай регулярных обобщённых функций $f(x), f'(x)$. Тогда для любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$ можно записать, что

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx,$$

и применяя интегрирование по частям, с учётом того, что функции $\varphi(x) = 0$ при больших значениях $|x|$ получим, что

$$(f'(x), \varphi(x)) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = (f(x), -\varphi'(x)).$$

Таким образом, общее правило дифференцирования обобщённых функций определяется равенством

$$(f'(x), \varphi(x)) = (f(x), -\varphi'(x)).$$

В силу того, что пробные функции $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируемы, для обобщённых функций производные любого порядка можно определить по формуле

$$(f^{(n)}(x), \varphi(x)) = (f(x), (-1)^n\varphi^{(n)}(x)).$$

Таким образом,

$$(\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) = (\delta(x), (-1)^n\varphi^{(n)}(x)) = (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

Для производной функции Хевисайда справедливы равенства

$$(H'(x), \varphi(x)) = -(H(x), \varphi'(x)) = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

т.е.

$$H'(x) = \delta(x).$$

Рассмотрим регулярную обобщённую функцию, которая определяется функцией $f(x)$ непрерывно-дифференцируемой при

$$x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty).$$

Для производной от этой регулярной обобщённой функции справедливы равенства

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Применяя к каждому слагаемому интегрирование по частям, получим что

$$(f'(x), \varphi(x)) =$$

$$-f(x_0 - 0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx +$$

$$+f(x_0 + 0)\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= (f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0))\varphi(x_0) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx.$$

В результате можно записать, что для всех пробных функций $\varphi(x) \in C_0^\infty$:

$$(f'(x), \varphi(x)) = ([f]_{x_0}\delta(x - x_0) + \{f'\}, \varphi(x)),$$

где

$$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0),$$

скачок функции $f(x)$ в точке x_0, а запись $\{f'\}$ означает производную функции $f(x)$ в тех точках, где она определена.