

4.7 Свёртка обобщённых функций.

Предполагая что функции $f(x), g(x)$ и $f * g(x)$ определяют регулярные обобщённые функции, рассмотрим действие функционала $f * g(x)$ на пробную функцию $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} (f * g(x), \varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

меняя порядок интегрирования и сделав замену переменной, получим, что

$$\begin{aligned} (f * g(x), \varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) \varphi(x) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \varphi(y + z) dz dy = \\ &= (f(y), (g(z), \varphi(y + z))). \end{aligned}$$

Таким образом, действие функционала $f * g$ на пробную функцию можно определить следующим образом: сначала функционал $g(z)$ действует на пробную функцию $\varphi(y + z)$, при этом определяя новую функцию $\psi(y) = (g(z), \varphi(y + z))$, на которую уже должен действовать функционал $f(y)$. В случае, если функция $\psi(y) \in C_0^\infty$, данная операция является корректной.

Следовательно, *операцию свёртки можно определить не для всех обобщённых функций.*

В случае, если функция

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x + y)) \in C_0^\infty,$$

то свёртка обобщённых функций $f * g$ определяется равенством

$$(f * g(x), \varphi(x)) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))).$$

Аналогично, если функция

$$\theta(x) = (f(y), \varphi(x + y)) \in C_0^\infty,$$

то свёртка обобщённых функций $g * f$ определяется равенством

$$(g * f(x), \varphi(x)) = (g(x), (f(y), \varphi(x + y))).$$

Можно показать, что если определены свертки обобщённых функций $f * g$ и $g * f$, то они совпадают: для каждой пробной функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$(f * g(x), \varphi(x)) = (g * f(x), \varphi(x)).$$

Также можно привести пример обобщённых функций $f(x), g(x), h(x)$ таких, что свёртки $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$ существуют, но не равны!

Вычислим свёртки с δ -функцией:

$$\begin{aligned}(\delta * f(x), \varphi(x)) &= (\delta(x), (f(y), \varphi(x+y))) = \\ &= (f(y), \varphi(x+y))|_{x=0} = (f(y), \varphi(y)),\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(f * \delta(x), \varphi(x)) &= (f(x), (\delta(y), \varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

Таким образом, для любой обобщённой функции $f(x)$ свёртка с δ -функцией определена и

$$\delta * f = f * \delta = f.$$

Если соответствующие операции свёртки определены, то для производной от свёртки справедливы равенства

$$\partial^n (f * g) = \partial^n f * g = f * \partial^n g.$$

Действительно, по определению для производной обобщённой функции справедливы выражения

$$\begin{aligned}((f * g)'(x), \varphi(x)) &= -(f * g(x), \varphi'(x)) = \\ &= -(f(x), (g(y), \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x+y))) = \\ &= -(f(x), (g(y), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), (g'(y), \varphi(x+y))) = (f * g'(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

С другой стороны, так как по предположению

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in C_0^\infty,$$

то в силу линейности и непрерывности функционала $g(y)$, выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} (g(y), \varphi(x+y)) = (g(y), \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x+y)),$$

поэтому

$$\begin{aligned}((f * g)'(x), \varphi(x)) &= -(f(x), \frac{\partial}{\partial x} (g(y), \varphi(x+y))) = \\ &= (f'(x), (g(y), \varphi(x+y))) = (f' * g(x), \varphi(x)).\end{aligned}$$

Для производных порядка n равенства получаются аналогично.