4.8 Фундаментальные решения дифференциальных операторов.

Фундаментальным решением дифференциального оператора L называется обобщённая функция $\mathcal{E}(x)$, такая что

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

т.е. для любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$

$$(L\mathcal{E}(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

Для обыкновенного дифференциального уравнения порядка n

$$Ly(x) = a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_n(x)y(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}y(x) = f(x),$$

если $a_0(0) = 1$, фундаментальное решение может быть найдено по формуле

$$\mathcal{E}(x) = H(x)v(x),$$

где $H(x)-$ функция Хевисайда, а функция $v(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$Lv(x) = 0,$$
$$v^{(n-1)}(0) = 1,$$
$$v(0) = 0, v'(0) = 0, ..., v^{(n-2)}(0) = 0.$$

Пусть функция $v(x) \in C^n$ и является решением данной задачи (для её нахождения можно применить преобразование Лапласа).

Вычислим производную $(H(x)v(x))'$. Для любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty$, используя свойства обобщённых функций, можно записать, что

$$((H(x)v(x))', \varphi(x)) = -(H(x)v(x), \varphi'(x)) =$$

$$= (H(x), -v(x)\varphi'(x)) =$$
$$= (H(x), -(v(x)\varphi(x))') + (H(x), v'(x)\varphi(x)) =$$
$$= (H'(x), v(x)\varphi(x)) + (H(x)v'(x), \varphi(x)),$$

так как $H'(x) = \delta(x)$, то

$$((H(x)v(x))', \varphi(x)) =$$
$$= (\delta(x), v(x)\varphi(x)) + (H(x)v'(x), \varphi(x)) =$$
$$= v(0)\varphi(0) + (H(x)v'(x), \varphi(x)),$$

а так как $v(0) = 0$, то приходим к равенству

$$(H(x)v(x))' = H(x)v'(x).$$

Аналогично,

$$(H(x)v(x))'' = (H(x)v'(x))' =$$
$$= v'(0)\delta(x) + H(x)v''(x) = H(x)v''(x),$$
$$\ldots$$
$$(H(x)v(x))^{(n-1)} = (H(x)v^{(n-2)}(x))' =$$
$$= v^{(n-2)}(0)\delta(x) + H(x)v^{(n-1)}(x) = H(x)v^{(n-1)}(x),$$

и

$$(H(x)v(x))^{(n)} = (H(x)v^{(n-1)}(x))' =$$
$$= v^{(n-1)}(0)\delta(x) + H(x)v^{(n)}(x) =$$
$$= \delta(x) + H(x)v^{(n)}(x).$$

Домножая полученные равенства на $a_k(x)$ и складывая, с учётом того, что

$$a_0(x)\delta(x) = a_0(0)\delta(x) = \delta(x),$$

а $Lv(x) = 0$, получим

$$L\mathcal{E}(x) = L(H(x)v(x)) = \delta(x) + H(x)L(v(x)) = \delta(x).$$

В случае, когда коэффициенты дифференциального оператора L постоянны $a_k(x) = a_k = const$, частное решение дифференциального уравнения

$$Ly(x) = f(x),$$

находится через свертку фундаментального решения и правой части $f(x)$:

$$y(x) = \mathcal{E} * f(x).$$

Действительно, используя формулу для дифференцирования свертки и постоянность коэффициентов, можно записать, что

$$L(\mathcal{E} * f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (\mathcal{E} * f)(x) =$$

$$= (\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \mathcal{E}) * f(x) = L\mathcal{E} * f(x),$$

следовательно, по определению фундаментального решения

$$L(\mathcal{E} * f(x)) = \delta * f(x) = f(x).$$

Если дифференциальный оператор L описывает некоторую линейную систему обработки сигналов, то правая часть $f(x)$ определяет воздействие на эту систему, т.е. входной сигнал, а функция $y(x)-$решение уравнения $Ly(x) = f(x)$, определяет реакцию системы, т.е. сигнал на выходе.

При этом, фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ определяет реакцию системы на импульсное воздействие $f(x) = \delta(x)$.

Зная, как система реагирует на импульсное воздействие, реакцию на произвольный входной сигнал $f(x)$ можно найти через свёртку $y(x) = \mathcal{E} * f(x)$.