

4.10 Дифференцирование и преобразование Фурье.

Для быстро убывающих функций справедливы формулы

$$\widehat{\varphi^{(n)}} = \widehat{(-ix)^n \varphi},$$

$$\widehat{\varphi^{(n)}} = (i\omega)^n \widehat{\varphi},$$

используя их, получим аналогичные формулы для обобщённых функций медленного роста.

Если $\varphi(\omega) \in S$, то для производной от преобразования Фурье обобщённой функции медленного роста получим

$$\begin{aligned} (\widehat{f^{(n)}}(\omega), \varphi(\omega)) &= (-1)^n (\widehat{f}(\omega), \varphi^{(n)}(\omega)) = \\ &= (-1)^n (f(x), \widehat{\varphi^{(n)}}(\omega)(x)) = \\ &= (-1)^n (f(x), (ix)^n \widehat{\varphi}(\omega)(x)) = \\ &= ((-ix)^n f(x), \widehat{\varphi}(\omega)(x)) = \\ &= (\widehat{(-ix)^n f}, \varphi). \end{aligned}$$

Для преобразования Фурье от производной можно записать, что

$$\begin{aligned} (\widehat{f^{(n)}}(\omega), \varphi(\omega)) &= (f^{(n)}(x), \widehat{\varphi}(x)) = \\ &= (-1)^n (f(x), \widehat{\varphi^{(n)}}(x)) = \\ &= (-1)^n (f(x), \widehat{(-i\omega)^n \varphi}(x)) = \\ &= (-1)^n (\widehat{f}(\omega), (-i\omega)^n \varphi(\omega)) = \\ &= ((i\omega)^n \widehat{f}, \varphi). \end{aligned}$$