

4.11 Примеры преобразования Фурье обобщённых функций.

В качестве примера найдём преобразование Фурье от $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$. Для быстро убывающих функций $\varphi(\omega) \in S$ получим

$$\begin{aligned} (\widehat{\delta_{x_0}}(\omega), \varphi(\omega)) &= (\delta(x - x_0), \widehat{\varphi}(x)) = \\ &= (\delta(x - x_0), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega x} d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega x_0} d\omega = \\ &= (e^{-i\omega x_0}, \varphi(\omega)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widehat{\delta_{x_0}} = e^{-ix_0\omega},$$

в частности, при $x_0 = 0$,

$$\widehat{\delta(x)} = 1(\omega).$$

Аналогично, для $\delta_{-x_0}(x) = \delta(x + x_0)$

$$\widehat{\delta_{-x_0}} = e^{ix_0\omega}.$$

Используя формулу

$$F[f(x)](\omega) = 2\pi F^{-1}[f(-x)](\omega),$$

получим, что

$$\widehat{e^{i\omega_0 x}} = 2\pi F^{-1}[e^{-i\omega_0 x}](\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

и

$$\widehat{e^{-i\omega_0 x}} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0).$$

Используя эти формулы, можно определить преобразование Фурье для периодических функций.

Раскладывая T -периодическую функцию $f(x)$ в ряд Фурье, можно записать (в точке непрерывности x), что

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_0 n x}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Так как периодическая функция определяет регулярную обобщённую функцию медленного роста $f(x)$, то её преобразование Фурье записывается в виде

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - \omega_0 n).$$