4.12 Функция отсчётов.

Для быстро убывающей функции $\varphi(x) \in S$ справедлива формула Пуассона

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n).$$

Так как

$$\varphi(2\pi n) = (\delta(x - 2\pi n), \varphi(x)),$$

а

$$\widehat{\varphi}(n) = (\delta(\omega - n), \widehat{\varphi}(\omega)) =$$
$$= (\widehat{\delta(\omega - n)}(x), \varphi(x)) = (e^{-inx}, \varphi(x)),$$

то формулу Пуассона можно записать в виде

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inx}.$$

Обобщённая функция

$$\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT),$$

называется *функцией отсчётов Шеннона.*

Преобразование Фурье от данной функции можно найти с помощью полученной формулы Пуассона:

$$F[\mathrm{comb}_T(x)](\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} =$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T\omega - 2\pi n) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} n).$$