## 4.13 Теорема Котельникова - Шеннона.

*Пусть функция $f(x)$ непрерывна, принадлежит пространству $L_2$ и её преобразование Фурье обладает свойством*

$$\widehat{f}(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega.$$

*Тогда справедлива интерполяционная формула*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\mathrm{sinc}_\Omega(x - nT),$$

*где $T = \pi/\Omega$ и*

$$\mathrm{sinc}_\Omega(x) = \frac{\sin \Omega x}{\Omega x}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим для функции $f(x)$ её *выборку с шагом* $T = \pi/\Omega$:

$$f_s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(x - nT) = f(x)\mathrm{comb}_T(x).$$

Вычисляя преобразование Фурье от выборки $f_s(x)$ получим, что

$$\begin{aligned} &\widehat{f_s}(\omega) = \\ &= F[f \cdot \mathrm{comb}_T](\omega) = \frac{1}{2\pi} F[\mathrm{comb}_T] * \widehat{f}(\omega) = \qquad (I) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}n) * \widehat{f}(\omega) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega - \frac{2\pi}{T}n). \end{aligned}$$

Так как графики $\widehat{f}(\omega)$ и $\widehat{f}(\omega - \frac{2\pi}{T})$ не пересекаются, то

$$\widehat{f}(\omega) = T\,\mathrm{rect}_\Omega(\omega) \cdot \widehat{f_s}(\omega),$$

где функция

$$\mathrm{rect}_\Omega(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} &f(x) = \\ &= TF^{-1}[\widehat{f_s}(\omega) \cdot \mathrm{rect}_\Omega(\omega)](x) = Tf_s * F^{-1}[\mathrm{rect}_\Omega](x) = \qquad (II) \\ &= \frac{\pi}{\Omega} f_s * \frac{1}{2\pi}\frac{2\sin \Omega x}{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(x - nT) * \frac{\sin \Omega x}{\Omega x} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin \Omega(x - nT)}{\Omega(x - nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\mathrm{sinc}_\Omega(x - nT). \end{aligned}$$

Функция выборки $f_s(x)$ представляет собой математическую модель аналого-цифрового преобразователя (АЦП) с шагом дискретизации $T$ (или частотой дискретизации $1/T$), который из непрерывного сигнала сохраняет только набор дискретных значений.

Интерполяционная формула Котельникова–Шеннона, наоборот, моделирует цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), который по отсчётам восстанавливает значения исходной функции.

Из условия Найквиста: $\widehat{f}(\omega) = 0$, при $|\omega| > \Omega$, следует связь между максимальной частотой, присутствующей в сигнале, и необходимым шагом дискретизации $T$, с которым должен происходит процесс оцифровки.

Так как

$$2\pi\nu_{max} = \omega_{max} < \Omega = \frac{\pi}{T},$$

то шаг дискретизации $T$ должен быть меньше значения $\frac{1}{2\nu_{max}}$ (или частота дискретизации должна быть больше удвоенной максимальной частоты сигнала).

При выполнении данного условия по каналам связи достаточно передавать не весь сигнал полностью, а лишь его значения в определенные моменты времени.