

2.1 Непрерывность, ограниченность, асимптотическое поведение

Утверждение 2.1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая, то её преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ является непрерывной, ограниченной функцией, стремящейся к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как, по условию, для всех ω

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\omega x}| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq C < \infty,$$

то функция $\hat{f}(\omega)$ ограничена, а по теореме о непрерывности интегралов, зависящих от параметра, и непрерывна.

Так как

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \end{aligned}$$

то $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$, при $|\omega| \rightarrow \infty$ по лемме Римана-Лебега. □

Замечание. Коэффициенты ряда Фурье T -периодической абсолютно интегрируемой функции также стремятся к нулю:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\omega_0 n x} dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$