

2.2 Линейная замена переменной в преобразовании Фурье

Утверждение 2.2. (Свойство подобия.) Для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ и некоторого числа $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\hat{f}_a(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\omega/a),$$

где функция $f_a(x) = f(ax)$.

Доказательство. Данное равенство получается после замены переменной $y = ax$:

$$\hat{f}_a(x)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{\omega}{a}y} dy = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\omega/a).$$

□

Утверждение 2.3. (Свойства запаздывания и смещения.) Для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ справедливы выражения

$$F[f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0} F[f(x)](\omega),$$

$$F[e^{i\omega_0 x} f(x)](\omega) = F[f(x)](\omega - \omega_0),$$

Доказательство. Применяя замену $y = x - x_0$, получим

$$\begin{aligned} F[f(x - x_0)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega(y+x_0)} dy = \\ &= e^{-i\omega x_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy = e^{-i\omega x_0} F[f(x)](\omega). \end{aligned}$$

Второе равенство также следует из определения преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} F[e^{i\omega_0 x} f(x)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega - \omega_0)x} dx = \\ &= F[f(x)](\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

□