2.3 Неравенство Бесселя

Утверждение 2.4. *Если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$, справедливо неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и рассмотрим частичную сумму её ряда Фурье

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))\overline{(f(x) - S_N(x))} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m} e^{-imx} dx,$$

то, используя выражения для коэффициентов Фурье и равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

можно записать, что

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} + 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Таким образом, для любого числа N

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Так как правая часть неравенства, по условию на функцию $f(x)$, ограничена, то можно перейти к пределу при $N \to \infty$, и получить неравенство, которое и называют *неравенством Бесселя*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

□

Применяя равенства, выражающие коэффициенты Фурье c_n, через коэффициенты Фурье a_n, b_n, можно получить, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=\infty}^{1} |c_{-n}|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n + ib_n}{2}\right|^2 + \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Таким образом, неравенство Бесселя запишется в виде

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$