

2.4.1 Преобразование Фурье от производных функции

Утверждение 2.5. Если производная k -го порядка $f^{(k)}(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема, то

$$F[f^{(k)}(x)](\omega) = (i\omega)^k F[f(x)](\omega).$$

Доказательство. В случае $k = 1$, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} F[f'(x)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} df(x) = \\ &= f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega F[f(x)](\omega), \end{aligned}$$

так как внеинтегральное слагаемое равно нулю.

Действительно, для $f(x)$ справедливо представление:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0).$$

По условию функция $f'(x)$ абсолютно интегрируема, поэтому при $|x| \rightarrow \infty$ предел функции $f(x)$ существует, а в силу того, что и сама функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, он равен нулю.

Для $k > 1$ формулы доказываются аналогично. □

Как следствие, получаем справедливость равенства

$$|\widehat{f}(\omega)| = \frac{|\widehat{f^{(k)}}(\omega)|}{|\omega|^k},$$

из которого следует, что чем более гладкой является функция $f(x)$, тем быстрее убывает её преобразование Фурье.