2.4.2 Коэффициенты ряда Фурье для производной функции

Утверждение 2.6. *Пусть функция $f(x)$ является 2π-периодической и непрерывно-дифференцируемой. Тогда для коэффициентов Фурье производной $f'(x)$ справедливы равенства*

$$c'_n = in\, c_n,$$

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Доказательство. Так как в силу непрерывности функции $f(-\pi) = f(\pi)$, то коэффициенты Фурье для функций $f'(x)$ и $f(x)$ связаны следующими равенствами:

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right) = in\, c_n.$$

Аналогично, для коэффициентов ряда Фурье в вещественном виде

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = nb_n,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = -na_n,$$

□

Таким образом, для производной $f'(x)$ можно вычислить коэффициенты и записать ряд Фурье

$$f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx,$$

но, так как производная $f'(x)$ является только непрерывной (а не кусочно-гладкой!), то о сходимости этого ряда, сказать ничего нельзя.

При этом, в силу непрерывности функции $f'(x)$ выполняются неравенства Бесселя

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Если $f(x)$ является 2π-периодической и дважды непрерывно-дифференцируемой на числовой прямой, то производная $f'(x)$ будет гладкой функцией, и её ряд Фурье будет сходиться к значению самой функции

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx.$$