

2.4.3 Дифференцирование преобразования Фурье

Утверждение 2.7. Если функции $f(x), xf(x), \dots, x^k f(x)$ абсолютно интегрируемые, то

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = F[(-ix)^k f(x)](\omega).$$

Доказательство. В случае $k = 1$, применяя теорему о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра, получим:

$$\begin{aligned} (\hat{f}(\omega))' &= \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-i\omega x} dx = \\ &= F[(-ix)f(x)](\omega). \end{aligned}$$

По условию на функцию $f(x)$ дифференцирование по параметру можно применить k раз и получить соответствующую формулу. $\square$

Таким образом, выполняется следующее свойство: чем быстрее убывает функция $f(x)$, тем более гладким будет её преобразование Фурье.