

2.4.4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Утверждение 2.8. Пусть функция $f(x)$ является 2π -периодической и $k+1$ раз непрерывно-дифференцируемой.

Тогда её ряд Фурье $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ можно продифференцировать k раз, и выполняется равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{inx}.$$

Доказательство. Так как для $\tilde{c}_n$ - коэффициентов Фурье функции $f^{(k+1)}(x)$, выполняются равенства

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x) e^{-inx} dx = (in)^{k+1} c_n,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(in)^k c_n e^{inx}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n| = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{|\tilde{c}_n|}{|n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tilde{c}_n|}{|n|}$$

Используя неравенство $ab \leq (a^2 + b^2)/2$, можно записать (так как $\tilde{c}_0 = 0$), что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2.$$

Сумма первого ряда равна $\frac{\pi^2}{6}$, а для второго, в силу условия на функцию $f^{(k+1)}(x)$, выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k+1)}(x)|^2 dx < \infty.$$

Поэтому функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{inx},$$

ограничен сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k c_n|,$$

следовательно, исходный функциональный ряд сходится равномерно.

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ может быть продифференцирован k раз. При этом, справедлива формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{inx}.$$

□

Утверждение 2.9. Если функция $f(x)$ является 2π -периодической, непрерывной, и коэффициент Фурье

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

то её ряд Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ можно проинтегрировать, при этом, выполняется равенство

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in}.$$

Доказательство. Так как функция $F(x)$ является 2π -периодической, и, по условию, её производная $F'(x) = f(x)$ непрерывна, то $F(x)$ представима рядом Фурье

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{inx},$$

при этом, для $\tilde{c}_n'$ — коэффициентов Фурье функции $F'(x)$ выполняются равенства

$$\tilde{c}_n' = in\tilde{c}_n = c_n.$$

Таким образом,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{inx} = \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} + \tilde{c}_0.$$

Так как, $F(0) = 0$, то

$$\tilde{c}_0 = - \sum_{n \neq 0} \tilde{c}_n = - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in}.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in}.$$

□