

3.1 Равномерная сходимость рядов Фурье

Утверждение 3.1. Если функция $f(x)$ является 2π -периодической и непрерывно-дифференцируемой на числовой прямой, то её ряд Фурье сходится равномерно.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье в виде

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда, используя выражения для коэффициентов Фурье производной $f'(x)$, можно записать

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, получим

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + |a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} + |b'_n|^2 \right) = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 = r_N, \end{aligned}$$

где величина r_N не зависит от x и стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, так как является остатком сходящегося числового ряда, в силу того, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

а по неравенству Бесселя для функции $f'(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

□