3.2 Равенство Ляпунова

При выводе неравенства Бесселя была установлена справедливость равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

В случае 2π-периодической и непрерывно-дифференцируемой на всей числовой прямой функции $f(x)$, её ряд Фурье сходится равномерно, поэтому левая часть данного равенства стремится к нулю при $N \to \infty$.

Таким образом, в пределе получается выражение, которое носит название *равенства Ляпунова:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

или, с учетом формул, выражающих связь коэффициентов ряда Фурье в комплексном и вещественном виде,

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Используя плотность непрерывно-дифференцируемых функций в пространстве функций, интегрируемых с квадратом (любую квадратично интегрируемую функцию можно сколь угодно точно приблизить "в среднем" непрерывно-дифференцируемой), можно доказать, что равенство Ляпунова справедливо и для функций, обладающих свойством

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Для функций $f(t)$, заданных на интервале $t \in (0, T)$, выражение

$$\int_{0}^{T} |f(t)|^2 dt$$

связано с энергией процесса, описываемого функцией $f(t)$. Например, по формуле Джоуля-Ленца, если вся работа электрического тока уходит на выделение тепла и нет других потребителей энергии, то формула

$$Q = \int_{0}^{T} \frac{U^2(t)}{R} dt,$$

определяет количество теплоты, выделяемой проводником при прохождении через него электрического тока с переменным напряжением $f(t) = U(t)$.

Если продолжить $f(t)$ до T-периодической функции, то равенство Ляпунова примет вид

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} |f(t)|^2 dt,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega n t dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}, \quad n > 0, \quad A_0 = |a_0|/\sqrt{2}.$$

Таким образом, если $f(t)$ измеряемая величина, описывающая некоторый процесс, то его энергию можно представить как сумму энергий отдельных составляющих $f(t)$ (гармоник на частотах, кратных основной частоте ω.)