

3.4 Явление Гиббса

Данное свойство связано со сходимостью ряда Фурье в окрестности точки разрыва кусочно-гладкой периодической функции, и заключается в том, что график частичной суммы её ряда Фурье имеет характерные выбросы.

Для иллюстрации рассмотрим поведение частичных сумм 2π -периодической функции, которая при $x \in [-\pi, \pi]$ задана функцией знака

$$s(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi, \\ -1, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Ряд Фурье данной функции имеет вид

$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Чтобы найти точки экстремума частичных сумм

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$$

вычислим производную

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N e^{i(2k-1)x} = \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} (e^{ix} + e^{i3x} + \dots + e^{i(2N-1)x}). \end{aligned}$$

Применяя формулу для суммы для геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{N-1} bq^n$, при $q = e^{i2x}$ и $b = e^{ix}$, получим что

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{1 - e^{i2Nx}}{1 - e^{i2x}} \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(e^{iNx} \frac{e^{-iNx} - e^{iNx}}{e^{-ix} - e^{ix}} \right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(e^{iNx} \frac{\sin Nx}{\sin x} \right) = \\ &= \frac{4 \cos Nx \sin Nx}{\pi \sin x} = \frac{2 \sin 2Nx}{\pi \sin x}. \end{aligned}$$

Следовательно, точками экстремума функции $S_N(x)$ на интервале $(0, \pi)$ являются

$$x_m = \frac{\pi}{2N} m, \quad m = 1, 2, \dots, 2N-1.$$

Данная функция нечётная и, кроме того, симметрична относительно точки $x = \pi/2$

$$S_N\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = S_N\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Так как

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\pi k-\frac{\pi}{2}-(2k-1)x\right)=(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+(2k-1)x\right),$$

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\pi k-\frac{\pi}{2}+(2k-1)x\right)=(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-(2k-1)x\right),$$

и

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+(2k-1)x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(2k-1)x\right).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть значения функции $S_N(x)$ в точках

$$x_m=\frac{\pi}{2N}m, \quad m=1, 2 \dots N.$$

Так как выражение

$$S_N(x_m)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^N\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2N}m}{2n-1}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2N}m}{(2n-1)\frac{\pi}{2N}m}\frac{\pi}{N}m,$$

является интегральной суммой для функции $\frac{\sin x}{x}$, то можно показать (например, *Фиштенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3), что при больших значениях N

$$S_N(x_m)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi m}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{2}{\pi}\text{Si}(\pi m).$$

Интегральный синус $\text{Si}(x)$ имеет локальные экстремумы в точках πm , а в точке $x=\pi$, эта функция имеет глобальный максимум. Поэтому функция $S_N(x)$ также имеет глобальный максимум в точке $x_1=\frac{\pi}{2N}$.

Можно показать (или использовать математические пакеты), что

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\sim 1,17898\dots,$$

т.е. примерно на 18% превышает значение самой функции $\text{sign } x$.

В указанном учебнике показывается, что этот же результат остается справедливым и при разложении в ряд Фурье кусочно-гладкой функции общего вида: *в окрестности точки разрыва, скачок значения суммы ряда Фурье превышает значение скачка самой функции примерно на 18%.*