4.1 Преобразование Фурье от произведения функций

Утверждение 4.1. *Пусть функция $f(x)$ является непрерывной, кусочно-гладкой и абсолютно интегрируемой, а функции $g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\widehat{f}(\omega)$ абсолютно интегрируемы, тогда справедливо равенство*

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega')\hat{g}(\omega-\omega')\,d\omega'.$$

Доказательство. По условиям на функцию $f(x)$, для неё справедлива формула Фурье:

$$f(x) = F^{-1}F[f](x),$$

причём, так как по условию преобразование Фурье $\widehat{f}(\omega)$ является абсолютно интегрируемой функцией, то внешний интеграл будет сходиться не только в смысле главного значения, таким образом, можно записать, что

$$\widehat{fg}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}F[f](x)g(x)e^{-i\omega x}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')e^{i\omega' x}d\omega'\,g(x)e^{-i\omega x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')e^{i\omega' x}g(x)e^{-i\omega x}\,d\omega' dx.$$

Так как по условиям на функции $\hat{f}(\omega'), g(x)$ повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega')g(x)e^{-i(\omega-\omega')x}|dx\,d\omega' \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega')|\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx\,d\omega' < \infty,$$

то выполняется равенство для повторных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')e^{i\omega' x}g(x)e^{-i\omega x}\,d\omega' dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')e^{i\omega' x}g(x)e^{-i\omega x}\,dxd\omega'.$$

Таким образом, после смены порядка интегрирования получим равенство

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i(\omega-\omega')x}dx\,d\omega' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega')\hat{g}(\omega-\omega')\,d\omega'.$$

□