

4.2 Определение и свойства свёртки

Определение. Свёрткой двух функций $f(x), g(x)$ называется интеграл вида

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Свёртка определена, если одна из функций измерима и ограничена, а вторая абсолютно интегрируема. Действительно, пусть $|f(x)| \leq c_f$, для почти всех $x \in \mathbb{R}$, и $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \leq C_g^1$. Тогда справедлива оценка

$$|f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|dy \leq c_f C_g^1.$$

Таким образом, при выполнении условий утверждения 4.1

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega).$$

Утверждение 4.2. Если функция $f(x)$ измеримая и ограниченная, а $g(x)$ абсолютно-интегрируемая и

$$\begin{aligned} f(x) &\neq 0, & x &\in (a_1, b_1), \\ g(x) &\neq 0, & x &\in (a_2, b_2), \end{aligned}$$

то

$$f * g(x) \neq 0, \quad x \in (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Доказательство. При данных условиях произведение

$$u(y) = f(y)g(x-y) = f(y)g^-(y-x) \equiv 0,$$

при

$$x \notin (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

□

Утверждение 4.3. Пусть функция $f(x)$ измеримая и ограниченная, а $g(x)$ абсолютно-интегрируемая, тогда

$$f * g(x) = g * f(x),$$

т.е. операция свёртки коммутативна.

Доказательство. Применяя замену переменных $z = x - y$, получим

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)dz = g * f(x).$$

□

Утверждение 4.4. Если функции $f(x), g(x)$ абсолютно интегрируемые, то свёртка $f * g(x)$ также будет абсолютно интегрируемой функцией.

Доказательство. Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq C_f^1 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \leq C_g^1 < \infty.$$

Так как повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx dy \leq C_f^1 C_g^1,$$

конечен, то существует равный ему повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy dx.$$

Поэтому, изменяя порядок интегрирования, получим что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx dy \leq C_f^1 C_g^1 < \infty. \end{aligned}$$

□

Утверждение 4.5. Пусть функция $f(x)$ измеримая и ограниченная, а функции $g(x), h(x)$ — абсолютно интегрируемые, тогда

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

т.е. операция свёртки ассоциативна.

Доказательство. По определению свёртки можно записать, что

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(y) h(x-y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(y-z) dz h(x-y) dy. \end{aligned}$$

В данном интеграле возможна смена порядка интегрирования, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(y-z)| |h(x-y)| dz dy \leq c_f C_g^1 C_h^1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y-z) h(x-y) dy dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) h(x-z-t) dt dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) (g * h)(x-z) dz = f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении данных условий операция свёртки ассоциативна. □

Утверждение 4.6. Если функция $f(x)$ непрерывна и ограничена, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема, то свертка функций $f * g(x)$ является непрерывной и ограниченной функцией.

Доказательство. Пусть $|f(x)| < c_f$ и $f(x - y) \rightarrow f(x_0 - y)$ при $x \rightarrow x_0$.

Так как

$$|f(x - y)g(y)| < c_f |g(y)| = G(y),$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy < \infty,$$

то по теореме о непрерывности интегралов, зависящих от параметра,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f * g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - y)g(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - y)g(y) dy = f * g(x_0). \end{aligned}$$

□

Утверждение 4.7. Если производные $f^{(k)}(x)$, $1 \leq k \leq m$, непрерывны и ограничены, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема, то свертка $f * g(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$\partial^k (f * g)(x) = (\partial^k f * g)(x), \quad 1 \leq k \leq m.$$

Доказательство. Пусть $|\partial^k f(x)| < c_f^k$. Так как

$$|\partial^k f(x - y)g(y)| < c_f^k |g(y)| = G(y),$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy < \infty,$$

то по теореме о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра

$$\begin{aligned} \partial^k (f * g)(x) &= \partial^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial^k f(x - y)g(y) dy = (\partial^k f * g)(x). \end{aligned}$$

□