4.3 Преобразование Фурье от свёртки функций

Утверждение 4.8. *Пусть* $f(x), g(x)$ *абсолютно интегрируемые функции, тогда справедлива формула*

$$\widehat{f*g}(\omega) = \hat{f} \cdot \hat{g}(\omega).$$

Доказательство. При данных условиях свёртка функций является абсолютно интегрируемой, следовательно, преобразование Фурье от неё существует, и

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\,e^{-i\omega x}dx.$$

Изменяя порядок интегрирования, что возможно, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)e^{-i\omega x}|\,dxdy \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy\; C_g^1 \leqslant C_f^1\, C_g^1,$$

получим

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-i\omega x}\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-i\omega(y+z)}\,dzdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-i\omega z}\,dz = \hat{f}\cdot\hat{g}(\omega).$$

□