

4.4 Свёртка и обратное преобразование Фурье

Утверждение 4.9. Пусть для функций $f(x), g(x)$ выполняются формулы Фурье:

$$f = F[\check{f}] = F[f_1], \quad g = F[\check{g}] = F[g_1],$$

а функции f_1, g_1 и $f_1 \cdot g_1$ являются абсолютно интегрируемыми, и для функций $f_1 \cdot g_1, f_1 * g_1$ также выполняются формулы Фурье.

Тогда

$$\begin{aligned} F^{-1}[f \cdot g] &= \check{f} * \check{g}, \\ F^{-1}[f * g] &= 2\pi \check{f} \cdot \check{g}. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя полученные ранее формулы, можно записать, что

$$\widehat{f_1 * g_1} = \hat{f}_1 \cdot \hat{g}_1 = f \cdot g,$$

и

$$\widehat{f_1 \cdot g_1} = \frac{1}{2\pi} \hat{f}_1 * \hat{g}_1 = \frac{1}{2\pi} f * g,$$

откуда следует, что для обратного преобразования Фурье выполняются формулы

$$\begin{aligned} F^{-1}[f \cdot g] &= \check{f} * \check{g}, \\ F^{-1}[f * g] &= 2\pi \check{f} \cdot \check{g}. \end{aligned}$$

□