

4.5.1 Приближение непрерывных функций дифференцируемыми

Теорема 4.10. Любую непрерывную функцию $f(x) \in C(\mathbb{R})$ можно приблизить непрерывно дифференцируемыми функциями $f_\delta(x) \in C^1(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\delta(x) \rightarrow f(x), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$k_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}(H(x+\delta) - H(x-\delta)),$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Покажем, что в качестве функции $f_\delta(x)$ можно взять свёртку

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &= k_\delta * f(x) = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} (H(x-y+\delta) - H(x-y-\delta)) f(y) dy = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy, \end{aligned}$$

усредняющую функцию Стеклова.

Действительно, $\forall \delta > 0$ функция $f_\delta(x)$ дифференцируема, и её производная

$$\frac{d}{dx} f_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} (f(x+\delta) - f(x-\delta)),$$

будет непрерывной функцией, таким образом, при любом фиксированном значении $\delta > 0$ функция $f_\delta(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Далее, вычисляя предел по правилу Лопиталя и учитывая непрерывность функции $f(x)$, получим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} (f(x+\delta) + f(x-\delta)) = f(x).$$

□

Следствие 1. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Следствие 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то функцию $f(x)$ можно продолжить по непрерывности вне заданного интервала так, что последовательность функций $f_\delta(x) = k_\delta * f(x)$ будет сходиться к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Доказательство. По теореме Кантора непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на нём, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Непрерывно продолжим функцию $f(x)$ так, чтобы неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ сохранялось при $x, y \in [a - \delta, b + \delta]$.

Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f_\delta(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x) dy \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

□