4.5.2 Приближение абсолютно интегрируемых функций бесконечно дифференцируемыми

Теорема 4.11. *Любую функцию $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ можно приблизить бесконечно дифференцируемыми функциями $f_n(x) \in C^\infty$:*

$$||f - f_n||_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\, dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $k(x) \geqslant 0$ со следующими свойствами

$$\int_{\mathbb{R}} k(x)\, dx = 1, \quad k(x) \in C^\infty.$$

Тогда для функции $k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}k(\frac{x}{\varepsilon})$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x)\, dx = 1,$$

и свертка

$$k_\varepsilon * f(x) \in C^\infty.$$

Покажем, что $||f(x) - k_\varepsilon * f(x)||_{L_1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.
Действительно,

$$||f(x) - k_\varepsilon * f(x)||_{L_1} = ||f(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy||_{L_1} =$$

$$= || \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)(f(x) - f(x-y))\, dy||_{L_1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} | \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)(f(x) - f(x-y))\, dy| dx.$$

Повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k_\varepsilon(y)||f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy < \infty,$$

в силу следующей оценки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k_\varepsilon(y)||f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)\, 2||f||_{L_1}\, dy = 2||f||_{L_1} < \infty.$$

Таким образом, существует равный ему повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f(x) - f(x-y)|\, dy\, dx.$$

Следовательно,

$$||f(x) - k_\varepsilon * f(x)||_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f(x) - f(x-y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy.$$

Так как, $k_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}k(\frac{y}{\varepsilon})$, то после замены переменной получим, что

$$||f(x) - k_\varepsilon * f(x)||_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-y)|\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-\varepsilon y)|\, dx\, dy.$$

Далее, справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-\varepsilon y)|\, dx = ||f(x) - f(x-\varepsilon y)||_{L_1} \leqslant 2||f||_{L_1}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-\varepsilon y)|\, dx \to 0,$$

по теореме о непрерывности сдвига в пространстве L_1.

Поэтому, для функции

$$g_\varepsilon(y) = k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-\varepsilon y)|\, dx,$$

выполнены свойства

$$g_\varepsilon(y) \leqslant 2||f||_{L_1} k(y) = G(y),$$

при этом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy = 2||f||_{L_1} < \infty,$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$g_\varepsilon(y) \to 0.$$

Поэтому по теореме о предельном переходе в интегралах, зависящих от параметра

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-\varepsilon y)|\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(y) dy \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

т.е.

$$||f(x) - k_\varepsilon * f(x)||_{L_1} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, для любой функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ можно построить последовательность бесконечно дифференцируемых функций $f_n(x) \in C^\infty$ таких, что

$$||f(x) - f_n(x)||_{L_1} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

□

Следовательно, для класса функций C^∞ выполняется свойство **плотности** в пространстве L_1: произвольная функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ может быть приближена функциями из класса C^∞.

Это утверждение может быть усилено.

Определение. Непрерывная функция называется *финитной в* (a, b), если замыкание множества точек, в которых она не равна нулю, ограничено и содержится в (a, b).

Следствие. *Любую абсолютно интегрируемую на конечном интервале* (a, b) *функцию* $f(x) \in L_1(a, b)$ *можно приблизить финитными в* (a, b) *бесконечно дифференцируемыми функциями* $f_n(x) \in C_0^\infty(a, b)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon' > 0$ можно выбрать числа a_1, b_1 такие, что $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и

$$||f||_{L_1((a,b)\setminus[a_1,b_1])} = \int_{(a,b)\setminus[a_1,b_1]} |f(x)|dx < \varepsilon'/2.$$

Далее, пусть число ε'' выбрано так, что выполняются неравенства

$$a < a_1 - \varepsilon'' < a_1, \quad b_1 < b_1 + \varepsilon'' < b.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = rect_{a_1,b_1}(x)f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a_1, b_1), \\ 0, & x \notin (a_1, b_1), \end{cases}$$

и функцию $k(x) \geqslant 0$ со следующими свойствами

$$\int_{\mathbb{R}} k(x)\, dx = 1, \quad k(x) \in C^{\infty},$$

$$k(x) = 0, \quad |x| \geqslant 1.$$

В качестве такой функции можно взять *усредняющую функцию Соболева:*

$$k(x) = \begin{cases} a\, e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad a = \left(\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\, dx \right)^{-1}.$$

Тогда для функции $k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} k(\frac{x}{\varepsilon})$ выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x)\, dx = 1,$$

$$k_\varepsilon(x) = 0, \quad |x| \geqslant \varepsilon.$$

Используя свойства свертки, получим что

$$k_\varepsilon * f_0(x) \in C^{\infty}$$

и

$$k_\varepsilon * f_0(x) = 0, \quad x \notin (a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon).$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon < \varepsilon''$ функция $k_\varepsilon * f_A(x) \in C_0^{\infty}(a, b)$.

В силу неравенства Минковского

$$||f(x) - k_\varepsilon * f_0(x)||_{L_1(a,b)} \leqslant ||f(x) - f_0(x)||_{L_1(a,b)} + ||f_0(x) - k_\varepsilon * f_0(x)||_{L_1(a,b)} =$$

$$= ||f(x)||_{L_1((a,b)\setminus[a_1,b_1])} + ||f_0(x) - k_\varepsilon * f_0(x)||_{L_1(a,b)} <$$
$$< \varepsilon'/2 + ||f_0(x) - k_\varepsilon * f_0(x)||_{L_1(\mathbb{R})}.$$

Второе слагаемое по теореме 4.11 может быть также сделано меньше $\varepsilon'/2$ за счёт выбора значения ε, так как функция $k_\varepsilon * f_0(x)$ аппроксимирует в $L_1(\mathbb{R})$ функцию $f_0(x)$. Таким образом, $k_\varepsilon * f_0(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

$\square$