4.5.3 Приближение функций, интегрируемых с квадратом модуля, финитными бесконечно дифференцируемыми функциями

Теорема 4.12. *Любую функцию $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ можно приблизить бесконечно дифференцируемыми финитными функциями $f_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:*

$$||f - f_n||_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_A(x) = rect_A(x) f(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < A, \\ 0, & |x| \geqslant A, \end{cases}$$

и функцию $k(x) \geqslant 0$ со следующими свойствами (например, усредняющую функцию Соболева)

$$\int_{\mathbb{R}} k(x)\, dx = 1, \quad k(x) \in C^\infty,$$

$$k(x) = 0, \quad |x| \geqslant 1.$$

Тогда для функции $k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} k(\frac{x}{\varepsilon})$ выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x)\, dx = 1,$$

$$k_\varepsilon(x) = 0, \quad |x| \geqslant \varepsilon.$$

Используя свойства свертки, получим что

$$k_\varepsilon * f_A(x) \in C^\infty,$$

и

$$k_\varepsilon * f_A(x) = 0, \quad |x| > A + \varepsilon,$$

т.е. функция $k_\varepsilon * f_A(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Покажем, что $k_\varepsilon * f_A(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

В силу неравенства Минковского

$$||f(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2} \leq ||f(x) - f_A(x)||_{L_2} + ||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2}.$$

Так как функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, то первое слагаемое за счет выбора числа A может быть сделано сколь угодно малым.

Для второго слагаемого, при фиксированном числе A, можно записать, что

$$||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2} =$$

$$= ||f_A(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) f_A(x-y)\, dy||_{L_2} =$$

$$= || \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)(f_A(x) - f_A(x-y))\, dy||_{L_2}.$$

Используя неравенство Гёльдера и свойства функции $k(x)$, получим, что

$$||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2}^2 = || \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon^{1/2}(y) k_\varepsilon^{1/2}(y)(f_A(x) - f_A(x-y))\, dy||_{L_2}^2 \leqslant$$

$$\leqslant || \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} ||_{L_2}^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dy\, dx.$$

Повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k_\varepsilon(y)||f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dx\, dy < \infty,$$

в силу следующей оценки, в которой применяется неравенство Минковского:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k_\varepsilon(y)||f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)\, (2||f_A||_{L_2})^2\, dy \leqslant 4||f||_{L_2}^2 < \infty.$$

Таким образом, существует равный ему повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dy\, dx,$$

и возможна смена порядка интегрирования

$$||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y)|f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dx\, dy.$$

Так как, $k_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}k(\frac{y}{\varepsilon})$, то после замены переменной получим, что

$$||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-y)|^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-\varepsilon y)|^2\, dx\, dy.$$

Далее, справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-\varepsilon y)|^2\, dx = ||f_A(x)-f_A(x-\varepsilon y)||_{L_2}^2 \leqslant 4||f||_{L_2}^2 < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-\varepsilon y)|^2\, dx \to 0,$$

по теореме о непрерывности сдвига в пространстве L_2.

Поэтому, для функции

$$g_\varepsilon(y) = k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x)-f_A(x-\varepsilon y)|^2\, dx,$$

выполнены свойства

$$g_\varepsilon(y) \leqslant 4||f||_{L_2}^2 k(y) = G(y),$$

при этом,

$$\int_{-1}^{1} G(y)dy = 4||f||^2_{L_2} < \infty,$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$g_\varepsilon(y) \to 0.$$

Поэтому по теореме о предельном переходе в интегралах, зависящих от параметра

$$\int_{-1}^{1} k(y) \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x) - f_A(x - \varepsilon y)|^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} g_\varepsilon(y) dy \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

т.е. при $\varepsilon \to 0$

$$||f_A(x) - k_\varepsilon * f_A(x)||_{L_2} \to 0.$$

Таким образом, для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ можно построить последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $f_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ таких, что

$$||f(x) - f_n(x)||_{L_2} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

$\square$

Следовательно, для класса функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполняется свойство **плотности** в пространстве L_2: произвольная функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ может быть приближена функциями из класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$.