5.1 Быстро убывающие функции S.

Множество всех функций из класса C^∞, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $1/|x|^k$ называется пространством быстро убывающих функций $\mathcal{S}$. Примером такой функции является $e^{-|x|^2}$.

Можно записать, что

$$\mathcal{S} = \{u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall k \; \forall m \; |x|^k \partial^m u(x) \to 0, \text{ при } |x| \to \infty\}.$$

Определим также пространство функций C_0^∞:

$$C_0^\infty = \{u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) : \exists A : u(x) = 0, \text{ при } |x| > A\}.$$

Можно заметить, что $C_0^\infty \subset S \subset L_1$. Для преобразования Фурье быстро убывающих функций справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть $u(x) \in \mathcal{S}$, тогда $\hat{u}(x) \in \mathcal{S}$, и выполняется интегральная формула Фурье*

$$u(x) = F^{-1}F[u](x) = FF^{-1}[u](x).$$

Для $v(x) \in \mathcal{S}$ выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\, d\omega.$$

Доказательство. Если функция $u(x) \in \mathcal{S}$, то при всех n функция $x^n u(x) \in L_1$, поэтому существует преобразование Фурье

$$F[(-ix)^n u(x)] = \partial^n \hat{u}(\omega),$$

т.е. функция $\hat{u}(\omega) \in C^\infty$.

Нужно показать, что для всех n, m при $|\omega| \to \infty$ функция

$$|\omega|^m \partial^n \hat{u}(\omega) \to 0.$$

Так как для быстро убывающей функции $v(x)$ производные $v^{(m)}(x) \in L_1$ при всех m, то преобразование Фурье $\widehat{v^{(m)}}$ существует, и

$$F[\partial^m v(x)](\omega) = (i\omega)^m F[v(x)](\omega).$$

Поэтому можно записать, что

$$(i\omega)^m \partial^n \hat{u}(\omega) = (i\omega)^m F[(-ix)^n u(x)](\omega) = (i\omega)^m F[v(x)](\omega) =$$

$$= F[\partial^m v(x)](\omega) = F[\partial^m((-ix)^n u(x))](\omega).$$

Так как функция $\partial^m((-ix)^n u(x)) \in \mathcal{S}$, то преобразование Фурье от неё стремится к нулю при $|\omega| \to \infty$. Следовательно, функция $\hat{u}(\omega)$ является быстро убывающей.

Интегральная формула Фурье выполняется в силу того, что быстро убывающие функции являются абсолютно интегрируемыми и гладкими.

Для доказательства формулы Парсеваля представим функцию $v \in \mathcal{S}$ формулой Фурье и сменим порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\omega)e^{i\omega x} d\omega}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{v}(\omega)}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{-i\omega x}\,dxd\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\,d\omega.$$

$\square$

Замечание. При $v(x) = u(x)$ равенство Парсеваля примет вид

$$||u||_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}||\hat{u}||_{L_2}^2.$$

Свёртка и обратное преобразование Фурье. Пусть функции $f(x), g(x) \in S$, тогда для них выполняются формулы Фурье:

$$f = F[\check{f}] = F[f_1], \quad g = F[\check{g}] = F[g_1],$$

а функции $f_1 = \check{f}$, $g_1 = \check{g}$ и $f_1 \cdot g_1$ также являются быстро убывающими.

Тогда справедливы выражения

$$\widehat{f_1 * g_1} = \hat{f}_1 \cdot \hat{g}_1 = f \cdot g,$$

и

$$\widehat{f_1 \cdot g_1} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}_1 * \hat{g}_1 = \frac{1}{2\pi}f * g,$$

откуда следует, что для обратного преобразования Фурье выполняются формулы

$$F^{-1}[f \cdot g] = \check{f} * \check{g},$$
$$F^{-1}[f * g] = 2\pi\check{f} \cdot \check{g}.$$