5.2 Формула Пуассона.

Для быстро убывающей функции $\varphi(x) \in S$ *справедлива формула*

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n).$$

Действительно, определим 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n),$$

и найдем её коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t + 2\pi n) e^{-int}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n} \varphi(y) e^{-iny}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iny}\, dy = \frac{1}{2\pi} \widehat{\varphi}(n).$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx},$$

записывается в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \widehat{\varphi}(n) e^{-inx}.$$

При $x = 0$ приходим к *формуле Пуассона:*

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n).$$