5.3 Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом L_2.

Как известно, для абсолютно интегрируемых, кусочно-гладких функций в точках непрерывности x выполняется формула Фурье

$$f(x) = F^{-1}F[f](x),$$

при этом внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

Если, дополнительно, преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ также является абсолютно интегрируемой функцией, то внешний интеграл (обратное преобразование Фурье) существует уже как обычный несобственный.

Однако пространство L_1 не инвариантно относительно преобразования Фурье: $\hat{f}(\omega)$ может не принадлежать L_1. В качестве примера, можно привести следующую пару функций:

$$rect_A(x) \leftrightarrow \frac{2\sin A\omega}{\omega}.$$

В приложениях более подходящим аппаратом является пространство L_2. Но функция, принадлежащая пространству L_2 может не быть абсолютно интегрируемой, поэтому определение преобразования Фурье необходимо скорректировать.

Справедливо следующее утверждение:

Любую функцию $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ можно приблизить в L_2-норме функциями из C_0^∞, т.е. существует последовательность функций $f_n(x) \in C_0^\infty$, такая что при $n \to \infty$

$$||f - f_n||_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Следовательно, произвольная функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ может быть приближена функциями из класса C_0^∞, а значит, и быстро убывающими функциями из $\mathcal{S}$.

Таким образом, *для любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ существует последовательность быстро убывающих функций $f_k(x) \in \mathcal{S}$ такая, что*

$$||f(x) - f_k(x)||_{L_2} \to 0, \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Далее, *по свойству быстро убывающих функций $\hat{f}_k(\omega) \in \mathcal{S}$.*

В силу *равенства Парсеваля*

$$||\hat{f}_k(\omega) - \hat{f}_m(\omega)||_{L_2} = ||f_k(x) - f_m(x)||_{L_2} \leq$$

$$\leq ||f_k(x) - f(x)||_{L_2} + ||f_m(x) - f(x)||_{L_2} \to 0, \quad \text{при} \quad k, m \to \infty,$$

т.е. *последовательность $\hat{f}_k(\omega)$ является* **фундаментальной**.

Так пространство L_2 - **полное,** то у этой последовательности существует предел - некоторая функция из L_2. Можно показать, что предельная функция не зависит от выбора последовательности функций $f_k(x) \in \mathcal{S}$. Этот предел и называется преобразованием Фурье функции $f(x) \in L_2$:

$$\hat{f}(\omega) \stackrel{L_2}{=} \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(\omega),$$

где функции $f_k(x) \in \mathcal{S}$ и

$$f_k(x) \xrightarrow{L_2} f(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Обратное преобразование Фурье определяется аналогично.

Для преобразования Фурье в пространстве функций L_2 справедлива теорема Планшереля.

Теорема 5.2. *Пусть функции $f(x), g(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда выполняются:*

1) Равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, dx,$$

при $f(x) = g(x)$:

$$||f(x)||^2_{L_2} = \frac{1}{2\pi} ||\hat{f}(\omega)|^2_{L_2},$$

2) Формула Фурье

$$F^{-1}F[f](x) \stackrel{L_2}{=} FF^{-1}[f](x) \stackrel{L_2}{=} f(x),$$

3) Формула для преобразование Фурье:

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\omega x}\, dx \stackrel{L_2}{=} \hat{f}(\omega),$$

т.е. если функция $f(x) \in L_2 \cap L_1$, то преобразование Фурье в L_2 совпадает с обычным преобразованием Фурье в L_1.