6.1 Формула Фурье для абсолютно интегрируемых функций L_1.

Используя фильтрующие свойства свёртки можно показать, что формула Фурье будет справедлива и в случае, когда $f(x), \widehat{f}(\omega) \in L_1$, т.е. при условии абсолютной интегрируемости самой функции и её преобразования Фурье, без каких-либо условий на производную.

Теорема 6.1. *Пусть функции $f(x)$ и $\widehat{f}(\omega)$ являются абсолютно интегрируемыми. Тогда формула Фурье*

$$f = F^{-1}[F[f]],$$

справедлива, как равенство функций в L_1.

Если, дополнительно, функция $f(x)$ непрерывна и ограничена, то формула Фурье выполняется $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = F^{-1}[F[f]](x).$$

Доказательство. Пусть функция $v(x)$ обладает следующими свойствами:

$$v(x) \geqslant 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx = 1,$$

для неё выполняется формула Фурье

$$v(x) = F^{-1}[\widehat{v}](x),$$

а преобразования Фурье $\widehat{v}(\omega) \in L_1$, ограничено: $\sup|\widehat{v}(\omega)| \leqslant C_{\widehat{v}}$, и $\widehat{v}(0) = 1$.

В качестве такой функции можно взять, например, функцию Гаусса

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \Longleftrightarrow \widehat{v}(\omega) = e^{-\omega^2/4}.$$

Рассмотрим функцию $v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} v(\frac{x}{\varepsilon})$ и покажем, что свёртка

$$f_\varepsilon = v_\varepsilon * f(x),$$

с одной стороны, сходится к функции $f(x)$ (в L_1 или поточечно), а с другой, сходится к функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x')dx' = 1$, то можно записать, что

$$f(x) - v_\varepsilon * f(x) =$$

$$= f(x)\int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x')dx' - \int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x')f(x-x')dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x')(f(x) - f(x-x'))dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} v(x'/\varepsilon)(f(x) - f(x-x'))dx,$$

и после замены переменной приходим к равенству

$$f(x) - v_\varepsilon * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x')(f(x) - f(x-\varepsilon x'))dx'.$$

Если функция $f(x)$ ограничена: $\sup f(x) \leqslant C_f$, и непрерывна, то выражение под интегралом

$$|v(x')(f(x) - f(x-\varepsilon x'))| \leqslant 2C_f\, v(x'),$$

и при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю, так как

$$f(x) - f(x-\varepsilon x') \to 0.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} v(x')dx' = 1$, то можно перейти к пределу под знаком интеграла, и получить, что $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(x) = v_\varepsilon * f(x) \to f(x), \quad \varepsilon \to 0.$$

В случае, когда функция $f(x)$ только абсолютно интегрируема, то $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ в L_1, т.е.

$$||f - f_\varepsilon||_{L_1} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Действительно,

$$||f - f_\varepsilon||_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - v_\varepsilon * f(x)|\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\int_{-\infty}^{\infty} v(x')(f(x) - f(x-\varepsilon x'))dx'|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x')|f(x) - f(x-\varepsilon x')|dx'dx.$$

Так как повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x')|f(x)-f(x-\varepsilon x')|dxdx' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} v(x')2\int_{-\infty}^{\infty}|f|dx' = 2||f||_{L_1} < \infty,$$

то, сменив порядок интегрирования, получим

$$||f-f_\varepsilon||_{L_1} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} v(x')\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-\varepsilon x')|dxdx'.$$

Выражение под интегралом ограничено

$$v(x')\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-\varepsilon x')|dx \leqslant v(x')\,2||f||_{L_1},$$

причем интегрируемой функцией, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x')dx' = 1,$$

и стремится к нулю в силу теоремы о непрерывности сдвига в L_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-\varepsilon x')|dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить, что

$$||f-f_\varepsilon||_{L_1} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

т.е. $f_\varepsilon \to f$ в L_1.

Покажем теперь, что также

$$f_\varepsilon(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

По свойству коммутативности свёртки можно записать, что

$$f_\varepsilon(x) = v_\varepsilon * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v_\varepsilon(x-x')f(x')dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon}v\left(\frac{x-x'}{\varepsilon}\right)f(x')dx'.$$

Так как для функции $v(x)$ выполняется формула Фурье, то

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon}F^{-1}[\widehat{v}]\left(\frac{x-x'}{\varepsilon}\right)f(x')dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}(\omega)e^{i\frac{x-x'}{\varepsilon}\omega}d\omega f(x')dx'.$$

В полученном интеграле можно сменить порядок интегрирования, так как повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{v}(\omega)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x')| dx' d\omega \leqslant ||f||_{L_1} ||\widehat{v}||_{L_1} < \infty,$$

в силу того, что $\widehat{v}(\omega) \in L_1$.

Поэтому

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \widehat{v}(\omega) e^{ix\frac{\omega}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ix'\frac{\omega}{\varepsilon}} dx' d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \widehat{v}(\omega) e^{ix\frac{\omega}{\varepsilon}} \widehat{f}(\frac{\omega}{\varepsilon}) d\omega,$$

и сделав замену переменной, получим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\varepsilon\omega) e^{ix\omega} \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

Так как преобразование Фурье $\widehat{v}(\omega)$ ограничено, то выражение под интегралом также ограничено

$$|\widehat{v}(\varepsilon\omega) e^{ix\omega} \widehat{f}(\omega)| \leqslant C_{\widehat{v}} |\widehat{f}(\omega)|,$$

причем интегрируемой функцией, так как по условию преобразование Фурье $\widehat{f}(\omega) \in L_1$.

Поэтому предельный переход под знаком интеграла возможен, и так как $\widehat{v}(0) = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega,$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$ в случае, когда $f(x) \in L_1$, и $\forall x \in \mathbb{R}$ в случае, когда функция $f(x)$ непрерывна.

$\square$