

7.1 Оригиналы и изображения

Пусть для функции $f(t)$ существует вещественное число a , такое что

$$f(t)e^{-at} \in L_1(0, \infty),$$

тогда функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а число $a_f = \inf(a)$ — *показателем роста* функции $f(t)$.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то для функции

$$g(t) = H(t)f(t)e^{-at}, \quad a > a_f,$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, можно вычислить преобразование Фурье:

$$\widehat{g}(\omega) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-i\omega t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p), \quad p = a + i\omega.$$

Функция $F(p)$ называется *изображением* оригинала f , а интеграл

$$F(p) = L[f(t)](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad \operatorname{Re} p > a_f$$

преобразованием Лапласа функции $f(t)$.

Так как преобразование Фурье $\widehat{g}(\omega) \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, то преобразование Лапласа

$$F(p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty,$$

оставаясь в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a_f\}$.