

7.2 Формула обращения для преобразования Лапласа

Пусть $f(t)$ - непрерывный и кусочно-гладкий оригинал с показателем роста a_f , и изображением $F(p) = L[f(t)](p)$. Тогда при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} F(p) e^{pt} dp,$$

где интеграл берётся по контуру

$$C_a = \{p = a + i\omega : a > a_f, \quad \omega \in (-\infty, \infty)\}.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Фурье, при $t > 0$ и $a > a_f$, можно записать, что

$$g(t) = H(t)f(t)e^{-at} = F^{-1}[\widehat{g}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{i\omega t} d\omega.$$

Поэтому при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\omega) e^{a+i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$