

7.3.1 Свойства подобия, запаздывания и смещения, свёртка оригиналов

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста a_f , и $F(p) = L[f(t)](p)$ — его изображение:

$$f(t) \iff F(p), \quad \operatorname{Re} p > a_f.$$

Тогда выполняются следующие свойства.

1. Для $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \iff \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha a_f.$$

2. Для $t_0 > 0$

$$H(t - t_0)f(t - t_0) \iff e^{-pt_0} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a_f.$$

3. Для $\alpha \in \mathbb{C}$

$$e^{\alpha t} f(t) \iff F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > a_f.$$

4. Если $g(t)$ — оригинал с показателем роста a_g , $G(p) = L[g(t)](p)$ — его изображение, то свёртка

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - s)g(s)ds,$$

является оригиналом с показателем роста $\max(a_f, a_g)$, и

$$f * g(t) \iff F(p)G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(a_f, a_g).$$

Доказательство. Первые три формулы доказываются заменой переменных в соответствующих интегралах.

Свойство для свёртки получается после смены порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} L[f * g](p) &= \int_0^\infty \int_0^t f(t - s)g(s)ds e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty g(s) \int_s^\infty f(t - s)e^{-pt} dt ds = \\ &= \int_0^\infty g(s) \int_0^\infty f(s')e^{-p(s+s')} ds' ds = \\ &= \int_0^\infty g(s)e^{-ps} ds \int_0^\infty f(s')e^{-ps'} ds' = F(p)G(p). \end{aligned}$$

Порядок интегрирования можно изменить в силу того, что при $\operatorname{Re} p > \max(a_f, a_g)$ повторный интеграл

$$\int_0^\infty \int_s^\infty |g(s)||f(t - s)|e^{-pt} dt ds \leq \int_0^\infty |g(s)|e^{-ps} ds \int_0^\infty |f(s')|e^{-ps'} ds' < \infty,$$

абсолютно сходится.