### 7.3.2 Преобразование Лапласа от производной: дифференцирование и интегрирование оригиналов

5. *Дифференцирование оригиналов.*

Пусть функция $f(t)$ дифференцируема, её производная $f'(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_{f'}$, и

$$\lim_{t\to+0} f(t) < \infty,$$

тогда функция $f(t)$ также является оригиналом с показателем роста

$$a_f \leqslant \max(0, a_{f'}),$$

и выполняется формула

$$f'(t) \quad \Longleftrightarrow \quad pF(p) - f(0), \quad \mathrm{Re}\, p > \max(0, a_{f'}).$$

Если функция $f(t) \in C^n(0,\infty)$, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_{f^{(n)}}$, и для $k = 0, ..., n-1$,

$$\lim_{t\to+0} f^{(k)}(0+) < \infty,$$

то функции $f^{(k)}(t)$ также являются оригиналами с показателем роста

$$a_{f^{(k)}} \leqslant \max(0, a_{f^{(n)}}),$$

и выполняется формула

$$f^{(n)}(t) \Longleftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0), \quad \mathrm{Re}\, p > \max(0, a_{f^{(n)}}).$$

Доказательство. Покажем, что функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_f \leqslant \max(0, a_{f'})$.

Пусть для чисел $p$ и $\varepsilon$ выполнены неравенства

$$\max(0, a_{f'}) < a - \varepsilon < a = \mathrm{Re}\, p.$$

Для выбранного значения $p$ можно записать, что

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|dt = \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-at}dt = \int_0^\infty |\int_0^t f'(s)ds + f(0)|\, e^{-at}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^t |f'(s)|ds\, e^{-at}dt + |f(0)| \int_0^\infty e^{-at}dt =$$

$$= \int_0^\infty |f'(s)| \int_s^\infty e^{-at}dtds + \frac{1}{a}|f(0)| < \infty,$$

так как число $a$ положительное и выбрано больше показателя роста функции $f'(t)$, поэтому повторный интеграл

$$\int_0^\infty \int_s^\infty |f'(s)|e^{-at}dt\, ds = \int_0^\infty |f'(s)| \int_s^\infty e^{-at}dt\, ds = \frac{1}{a}\int_0^\infty |f'(s)|\, e^{-as}ds < \infty,$$

сходится, и смена порядка интегрирования в первом слагаемом возможна.

Таким образом, функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $a_f \leqslant \max(0, a_{f'})$.

Покажем, что при $t \to \infty$

$$f(t)e^{-pt} \to 0.$$

Действительно, при выбранных значениях $p$ и $\varepsilon$:

$$|f(t)e^{-pt}| = |\int_0^t f'(s)ds + f(0)|\, e^{-at} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\varepsilon t}\int_0^t |f'(s)|e^{-(a-\varepsilon)t}ds + |f(0)|e^{-at} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\varepsilon t}\int_0^t |f'(s)|e^{-(a-\varepsilon)s}ds + |f(0)|e^{-at} \to 0, \quad t \to \infty,$$

так как $a-\varepsilon > a_{f'}$, и, следовательно, интеграл ограничен некоторой константой, а числа $\varepsilon, a > 0$.

Формула для преобразования Лапласа от производной $L[f'(t)](p)$ следует из интегрирования по частям: при $\operatorname{Re} p > \max(0, a_{f'})$

$$L[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}dt = f(t)\, e^{-pt}|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}dt = pF(p) - f(0).$$

.

Повторяя аналогичные рассуждения для производной $n$-го порядка функции $f(t)$, получим, что при $\operatorname{Re} p > \max(0, a_{f^{(n)}})$

$$L[f^{(n)}(t)](p) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

В качестве следствия получается следующее свойство.

*6. Интегрирование оригиналов.*

Если функция $f(t)$ непрерывна и является оригиналом с показателем роста $a_f$, то функция

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

также оригинал с показателем роста $a_g \leqslant \max(0, a_f)$, и выполняется формула

$$\int_0^t f(s)ds \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{p}F(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(0, a_f).$$

Доказательство. Так как $g'(t) = f(t)$, то применяя формулу преобразования Лапласа от производной к функции $g'(t)$, получим, что при

$$\operatorname{Re} p > \max(0, a'_g) = \max(0, a_f),$$

справедливо равенство

$$L[g'](p) = pL[g](p) - g(0),$$

а так как $g(0) = 0$, то

$$L[g](p) = \frac{1}{p}L[g'](p) = \frac{1}{p}L[f](p).$$