

7.3.3 Дифференцирование преобразования Лапласа: дифференцирование и интегрирование изображений

7. Если функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста a_f , то $\forall n > 0$ функции $t^n f(t)$ также являются оригиналами с тем же самым показателем роста, и справедлива формула

$$t^n f(t) \iff (-1)^n F^{(n)}(p), \quad \operatorname{Re} p > a_f.$$

Доказательство. Покажем, что функция $tf(t)$ является оригиналом.

Пусть для чисел p и ε выполнены неравенства

$$a_f < a - \varepsilon < a = \operatorname{Re} p.$$

Тогда при $t \geq 0$, выполняется оценка

$$|tf(t)e^{-pt}| \leq t|f(t)|e^{-at}.$$

Пусть число A_ε выбрано так, чтобы $t < e^{\varepsilon t}$ при $t > A_\varepsilon$, тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t|f(t)|e^{-at}dt &= \int_0^{A_\varepsilon} t|f(t)|e^{-at}dt + \int_{A_\varepsilon}^\infty t|f(t)|e^{-at}dt \leq \\ &\leq A_\varepsilon \int_0^{A_\varepsilon} |f(t)|e^{-at}dt + \int_{A_\varepsilon}^\infty e^{\varepsilon t}|f(t)|e^{-at}dt \leq \\ &\leq A_\varepsilon \int_0^\infty |f(t)|e^{-at}dt + \int_0^\infty |f(t)|e^{-(a-\varepsilon)t}dt < \infty, \end{aligned}$$

в силу того, что числа a и $a - \varepsilon$ выбраны больше показателя роста оригинала a_f .

Таким образом, выполнены условия теоремы о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра (если комплексное число $p = x + iy$, то $\partial p = \frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$), и так как

$$\frac{\partial}{\partial p} e^{-pt} = -te^{-pt},$$

то

$$F'(p) = \frac{\partial}{\partial p} L[f(t)](p) = -L[tf(t)](p).$$

Повторяя рассуждения, получим, что функции $t^n f(t)$, являются оригиналами, т.е. преобразование Лапласа является бесконечно дифференцируемой функцией при $\operatorname{Re} p > a_f$, и

$$F^{(n)}(p) = L[(-t)^n f(t)](p).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу того, что функция e^{-pt} является аналитической по комплексной переменной $p = x + iy$:

$$\bar{\partial} e^{-pt} = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) e^{-pt} = 0,$$

то преобразование Лапласа является **аналитической функцией** в полуплоскости

$$\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a_f\}.$$

Поэтому для вычисления обратного преобразования Лапласа может быть использована теорема о вычетах, и получена следующая формула обращения.

Пусть число $a > a_f$, контур

$$C_a = \{p = a + i\omega : -\infty < \omega < \infty\},$$

контур

$$C_{a,R} = \{p = a + i\omega : -R < \omega < R\},$$

и контур

$$\gamma_R = \{p = a + Re^{i\varphi} : \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}\},$$

точки $p_k : \operatorname{Re} p_k < a_f, k = 1, \dots, N$ — изолированные особые точки функции $F(p)$, и

$$\int_{\gamma_R} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Тогда, при $t > 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} F(p) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_{a,R}} F(p) e^{pt} dp + \int_{\gamma_R} F(p) e^{pt} dp \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{p_k} F(p) e^{pt}. \end{aligned}$$

Также справедливо следующее свойство преобразования Лапласа.

8. *Интегрирование изображений.*

Пусть функция $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ является оригиналом с показателем роста a_g , тогда $f(t)$ также является оригиналом с тем же показателем роста $a_f = a_g$, и

$$\frac{f(t)}{t} \iff \int_p^\infty F(q) dq,$$

где комплексная переменная интегрирования q стремится к бесконечно удалённой точке, оставаясь в полуплоскости $\{\operatorname{Re} q > a_f\}$.

Доказательство. Если функция $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, является оригиналом, то и функция $tg(t) = f(t)$, тоже оригинал с тем же показателем роста.

Применяя свойство дифференцирования изображений к функции $g(t)$, получим, что при $\operatorname{Re} q > a_f$

$$L[g(t)]'(q) = -L[tg(t)](q) = -L[f(t)](q) = -F(q),$$

откуда следует, что

$$\int_p^\infty F(q) dq = L[g(t)](p) = L\left[\frac{f(t)}{t}\right](p),$$

так как

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L[g(t)](q) \rightarrow 0$$

при $q \rightarrow \infty$, и $\operatorname{Re} q > a_f$.

Как следствие доказанных свойств справедлива следующая формула.

9. Если функция $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ является оригиналом с показателем роста $a_g < 0$, то

$$\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds \iff \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq,$$

Доказательство. Если функция $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ является оригиналом с показателем роста $a_g < 0$, то интеграл $\int_0^\infty \frac{f(s)}{s} ds$ сходится, и можно записать что

$$\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds = \int_0^\infty \frac{f(s)}{s} ds - \int_0^t \frac{f(s)}{s} ds.$$

Используя значение преобразования Лапласа от константы: $L[1] = \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$, и применяя свойство интегрирования оригиналов, получим

$$\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds \iff \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{f(s)}{s} ds - \frac{1}{p} L\left[\frac{f(s)}{s}\right](p).$$

Из свойства интегрирования изображений следует, что

$$L\left[\frac{f(s)}{s}\right](p) = \int_p^\infty F(q) dq, \quad \operatorname{Re} p \geq 0 > a_g,$$

поэтому, при $p = 0$

$$\int_0^\infty \frac{f(s)}{s} ds = L\left[\frac{f(s)}{s}\right](0) = \int_0^\infty F(q) dq.$$

Таким образом,

$$\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds \iff \frac{1}{p} \int_0^\infty F(q) dq - \frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq = \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq.$$