7.4 Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

Из теории электрических цепей известно, что падение напряжения U_R на сопротивлении пропорционально проходимому току $I(t)$:

$$U_R(t) = RI(t).$$

Падение напряжения U_L на катушке индуктивности пропорционально скорости изменения проходимого тока:

$$U_L(t) = L\frac{d}{dt}I(t).$$

Падение напряжения U_C на конденсаторе пропорционально текущему заряду $Q(t)$ конденсатора:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}Q(t),$$

поскольку $I(t) = \frac{d}{dt}Q(t)$, то

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt.$$

Так как напряжение, подводимое к замкнутой цепи, равно сумме падений напряжений на составляющих цепи, то уравнение для простейшей цепи имеет следующий вид:

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = U(t),$$

обозначив $a = R/L, \omega^2 = 1/LC$ уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \omega^2\int_0^t x(t)dt = f(t),$$

в случае, когда подводимое к цепи напряжение описывается гладкой функцией, тогда $f(t)$ дифференцируема: $f'(t) = f_1(t)$, и можно получить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_1(t).$$

Рассмотрим случай, когда $R = 0$, $f_1(t) = A\sin\omega_0 t$, и ток в начальный момент в цепи не течёт:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = A\sin\omega_0 t,$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Применим к этому уравнению преобразование Лапласа. С учетом свойства преобразования Лапласа от производной и значения изображения от $\sin\omega_0 t$ получим, что

$$L[x(t)](p) = X(p) = \frac{A\omega_0}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)}.$$

Рассмотрим случай, когда $\omega_0 \neq \omega$ (отсутствие резонанса). Так как

$$\frac{1}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega_0^2} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right),$$

то оригинал для изображения $X(p)$ находится по формуле:

$$x(t) = \frac{A\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{A}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)}\left(\omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t\right).$$

В случае резонанса $\omega_0 = \omega$, так как

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} = -\frac{1}{2p\omega}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = -\frac{1}{2p\omega}L'[\sin\omega t](p),$$

применяя свойство для производной от преобразования Лапласа, получим:

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2p\omega}L\left[t\sin\omega t\right],$$

далее, по свойству интегрирования оригинала получим, что

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega}L\left[\int_0^t \tau\sin\omega\tau\,d\tau\right].$$

Вычислив интеграл

$$\int_0^t \tau\sin\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t - \frac{t}{\omega}\cos\omega t,$$

получим, что для изображения $X(p)$ справедлива формула:

$$X(p) = \frac{A}{2}L\left[\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t - \frac{t}{\omega}\cos\omega t\right](p).$$

Таким образом, в случае резонанса, приходим к решению

$$x(t) = \frac{A}{2\omega^2}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right).$$

Можно проверить, что при $\omega_0 \to \omega$ нерезонансное решение стремится к резонансному.

Аналогичный метод можно применить к решению задачи Коши для уравнений произвольного порядка:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t),$$

$$x(0) = x_0,\ \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Применяя свойство преобразования Лапласа для производных оригинала, получим, что

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)X(p) -$$

$$-a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-1}x_1 + ... + x_{n-1}) -$$

$$-a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_1 - ... - x_{n-2}) -$$

$$...$$

$$-a_{n-1}x_0 = F(p).$$

Обозначив, соответствующие полиномы через $A(p)$ и $B_0(p)$, уравнение для изображения $X(p)$ можно записать в виде

$$A(p)X(p) - B_0(p) = F(p).$$

откуда следует, что $X(p)$ выражается функцией

$$X(p) = \frac{F(p) + B_0(p)}{A(p)}.$$

Проведя необходимые упрощения, оригинал $x(t)-$ решение исходной задачи Коши, можно найти, либо из таблицы преобразований Лапласа (если $F(p)-$ полином, то $X(p)-$ рациональная функция, которую можно разложить на простейшие дроби), либо используя формулу обращения, применяя методы вычисления интегралов с помощью вычетов.