7.5 Преобразование Лапласа степенной функции

Вычислим преобразование Лапласа функции $f(t) = t^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Так как интеграл $\int_0^\infty t^\nu e^{-at} dt$, сходится при $\nu > -1$, и $a > 0$, то функция $f(t) = t^\nu$ является *оригиналом* при $\nu > -1$, с *показателем роста* $a_f = 0$.

Если $p \in \mathbb{R}$, то при $p > 0$, после замены $\tau = pt$, получим

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{\nu+1}} \int_0^\infty \tau^\nu e^{-\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

При $p = n \in \mathbb{N}$, так как $\Gamma(n+1) = n!$, то выполняются следующие формулы для преобразований Лапласа

$$L[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[t](p) = \frac{1}{p^2}.$$

В случае комплексного числа $p = \rho_p e^{i\varphi_p}$, где $\varphi_p \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, можно записать, что

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{\nu+1}} \int_{C_p} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau,$$

где интегрирование ведётся по контуру

$$C_p = \{r e^{i\varphi_p}, r \in (0, \infty)\}.$$

Пусть $\varphi_p \in (0, \frac{\pi}{2})$. Рассмотрим замкнутый контур в комплексной плоскости, состоящий из отрезка

$$\{\tau = x, x \in [0, R]\},$$

дуги

$$\gamma_R = \{\tau = R e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \varphi_p)\},$$

и отрезка

$$C_{p,R}^- = \{\tau = r e^{i\varphi_p}, r \in (R, 0)\}.$$

В силу аналитичности функции в области, ограниченной данным контуром, интеграл по замкнутому контуру $[0, R] \cup \gamma_R \cup C_{p,R}^-$ равен нулю.

Таким образом, $\forall R > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R \tau^\nu e^{-\tau} d\tau + \int_{\gamma_R} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau &= - \int_{C_{p,R}^-} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau = \\ &= \int_{C_{p,R}^+} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau. \end{aligned}$$

При $R \rightarrow \infty$ первое слагаемое в левой части равенства стремится к гамма-функции $\Gamma(\nu+1)$, а выражение в правой части равенства к искомому интегралу:

$$\int_{C_{p,R}^+} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau \rightarrow \int_{C_p} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau.$$

Рассматривая интеграл по участку

$$\gamma_R = \{\tau = R e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \varphi_p)\} :$$

$$\begin{aligned} I_{\gamma_R} &= \int_{\gamma_R} \tau^\nu e^{-\tau} d\tau = \int_0^{\varphi_p} R^\nu e^{i\nu\varphi} e^{-R e^{i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= i R^{\nu+1} \int_0^{\varphi_p} e^{-R \cos \varphi} e^{i(\nu+1)R \sin \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

приходим к следующей оценке

$$|I_{\gamma_R}| \leq R^{\nu+1} \int_0^{\varphi_p} e^{-R \cos \varphi} d\varphi.$$

В силу выпуклости функции $\cos \varphi$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, выполняется неравенство

$$\cos \varphi > 1 - \frac{2}{\pi} \varphi, \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

поэтому

$$e^{-R \cos \varphi} < e^{-R(1 - \frac{2}{\pi} \varphi)}, \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |I_{\gamma_R}| &\leq R^{\nu+1} \int_0^{\varphi_p} e^{-R(1 - \frac{2}{\pi} \varphi)} d\varphi = R^{\nu+1} \frac{e^{-R}}{R} (e^{R \frac{2}{\pi} \varphi_p} - 1) \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{2} (R^\nu e^{(\frac{2}{\pi} \varphi_p - 1)R} - R^\nu e^{-R}). \end{aligned}$$

Так как $\varphi_p < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{2}{\pi} \varphi_p - 1 < 0$, и при $R \rightarrow \infty$ интеграл $I_{\gamma_R} \rightarrow 0$.
Таким образом,

$$\int_{C_p} t^\nu e^{-t} dt = \Gamma(\nu + 1),$$

и в случае комплексного значения числа p такого, что $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Im} p > 0$, для преобразования Лапласа остаётся справедливой формула

$$L[t^\nu](p) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}.$$

Случай, когда $\varphi_p \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ (т.е. $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{Im} p < 0$), рассматривается аналогично.