4.9 Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.

Считая, что функции $f(x), \hat{f}(\omega)$ определяют регулярные обобщённые функции, для пробных функций $\varphi(\omega)$ можно записать, что

$$
\begin{aligned}
(\hat{f}(\omega), \varphi(\omega)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\,\varphi(\omega)d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}(\omega)dx = \\
&= (f(x), \hat{\varphi}(x)).
\end{aligned}
$$

Таким образом, функционал $\hat{f}(\omega)$ должен действовать на пробную функции $\varphi(\omega)$ по следующему правилу:

$$\varphi(\omega) \to \hat{\varphi}(x) \to (f(x), \hat{\varphi}(x)),$$

т.е. на первом шаге к функции $\varphi(\omega)$ применяется преобразование Фурье, а затем на полученную функцию уже действует функционал $f(x)$.

Для того чтобы данная операция была корректной, функция $\hat{\varphi}(\omega)$ должна принадлежать области определения функционала $f(x)$, т.е. классу C_0^∞.

Однако, можно показать, что обе функции $\varphi(\omega)$ и $\hat{\varphi}(x)$ принадлежат классу C_0^∞ в том, и только в том случае, когда $\varphi(\omega) \equiv 0$.

Таким образом, при расширении понятия преобразования Фурье на функционалы (обобщённые функции) необходимо в качестве их области определения брать другой класс функций.

В качестве такого класса подходят быстро убывающие функции S, так как преобразование Фурье от быстро убывающей функции является также быстро убывающей функцией.

Поэтому при применении преобразования Фурье рассматриваются линейные непрерывные функционалы над пространством быстро убывающих функций S.

Такие функционалы носят название *обобщённых функций медленного роста.*

В результате, если $f(x)$−обобщённая функция медленного роста, преобразование Фурье от неё $\hat{f}(\omega)$− это обобщённая функция медленного роста, определяемая равенством

$$(\hat{f}(\omega), \varphi(\omega)) = (f(x), \hat{\varphi}(x)), \quad \forall\varphi(\omega) \in S,$$

обратное преобразование Фурье определяется аналогично:

$$(\check{f}(\omega), \varphi(\omega)) = (f(x), \check{\varphi}(x)), \quad \forall\varphi(\omega) \in S.$$