

§5 Устойчивость решений автономных систем

$Y' = F(Y)$ - автономная сист (пр. часть явно от t не зависит)
 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^n$ - неуст, открытое; $F, \frac{\partial F}{\partial Y} \in C(D) \Rightarrow$ вом-ая уса. по Пикара

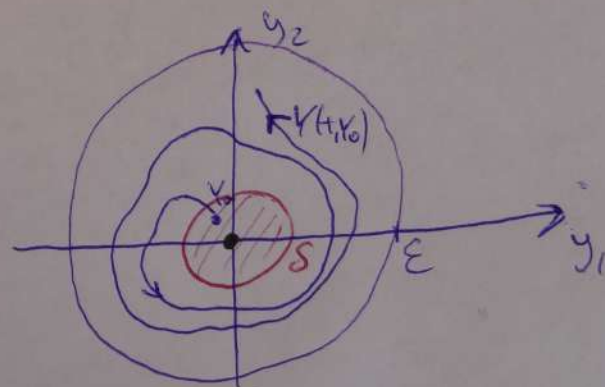
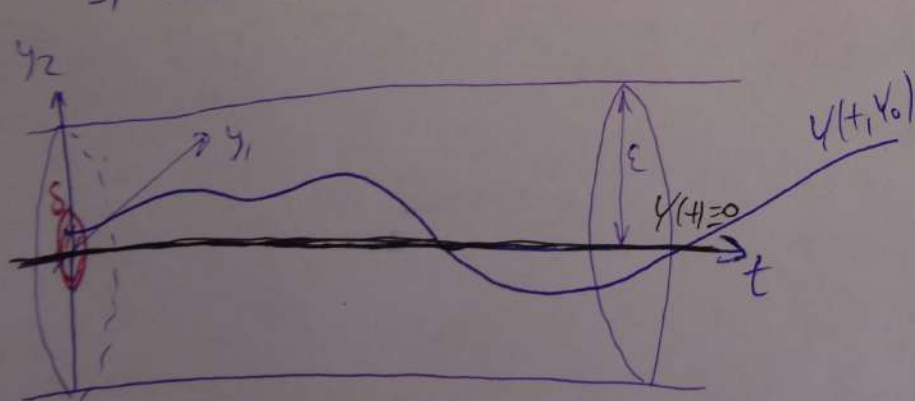
Пусть $F(0) = 0 \Rightarrow Y(t) \equiv 0$ - реш $Y' = F(Y)$; нул. решение - иссл. на уст-во.

Опр. $Y(t) \equiv 0$ - устойчиво по Ляпунову, если:

- 1) $Y(t)$ определено $g_0 + \delta$;
- 2) $\exists \Delta : \forall Y_0 : \|Y_0\| < \Delta \quad Y(t, Y_0)$ определено $g_0 + \delta$
- 3) $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall Y_0 : \|Y_0\| < \delta, \text{ то } \|Y(t, Y_0)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$

$Y(t, Y_0)$ - реш $\exists K$

$$\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$



стрелками
указывает
движение
при увелич т

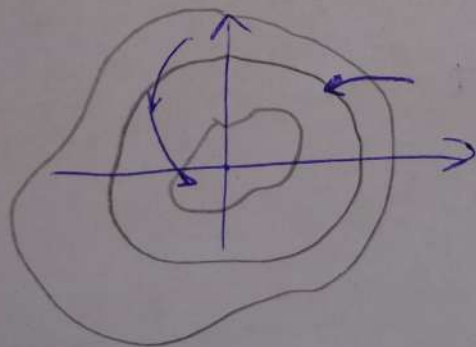
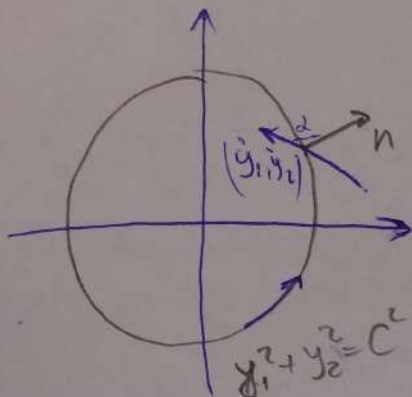
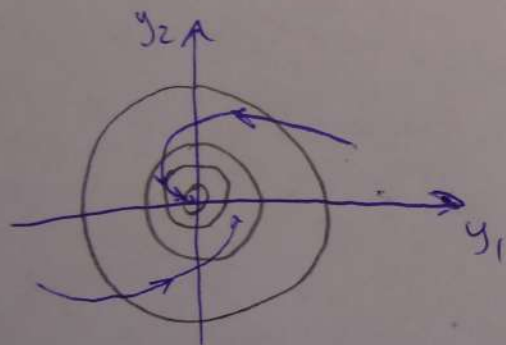
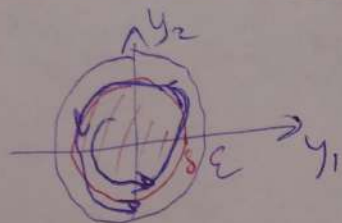
Опр. $\{y_1, \dots, y_n\}$ - фазовое пространство

Опр. Если $Y(t, Y_0)$ - реш, определ. на (α, ω) , то $\{(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$ - интегральная кривая ($\in \mathbb{R}^{n+1}$)

$\{(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$ - траектории, фазовые кривые ($\in \mathbb{R}^n$)
 (это проекции интегральной кривой на фазовое пр-во)

$$y \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$



$$\angle F, n = \|F\| \cdot \|n\| \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha > 90, \cos \alpha < 0 \Rightarrow$$

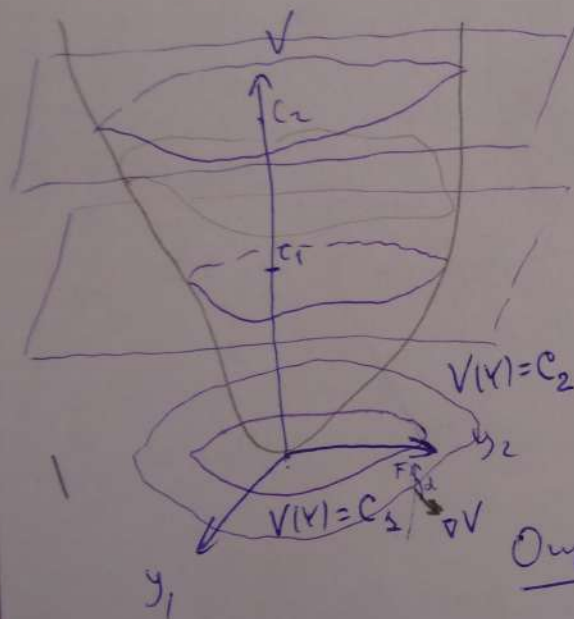
реш. выходит

"внутри"

$$\angle \vec{F}, \vec{n} > 90 \Rightarrow \text{мул. реш. ас. уст.}$$

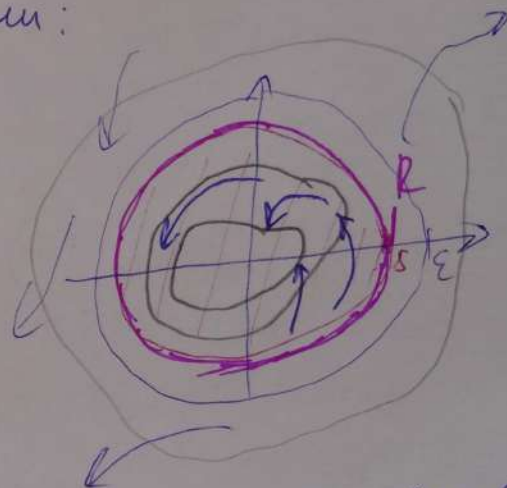
$$\angle \vec{F}, \vec{n} \leq 90 \Rightarrow \text{мул. реш. уст.}$$

$V(y_1, y_2)$ - её миним. значение.



Возьмём $V(y_1, y_2)$, со св-ми:

- 1) $V(0,0)=0$
- 2) минимум V в $(0,0)$
- 3) $V \in C^1$
- 4) $\langle F, \nabla V \rangle \leq 0$
 $\|Y\| \leq R$



Опред. ф-ция $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\| < R$, называемая ф-цией Ляпунова, где $Y' = F(Y)$, если она удовлетворяет условиям:

- 1) $V \in C^1 (\|Y\| < R)$
- 2) $V(Y) > 0$ $0 < \|Y\| < R$; $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle \leq 0$ где $\|Y\| < R$

Замечание.

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

Если $Y(t)$ - реш

$Y' = F(Y)$, то

$$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1(Y) \\ \vdots \\ f_n(Y) \end{pmatrix} \right\rangle$$

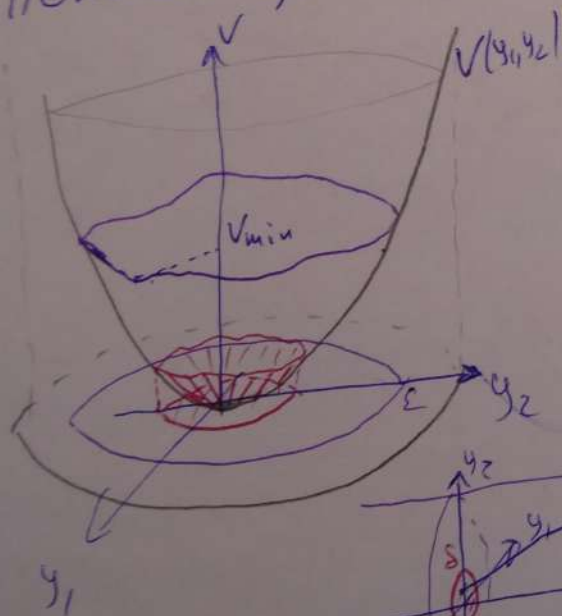
$$\langle \nabla V, F \rangle = \frac{dV(Y(t))}{dt}$$

- производная в арг системы (вдоль решения).

Теорема о устойчивости

Если существует ф-ия Ляпунова сист $Y' = F(Y)$, то мул. реш $Y' = F(Y)$ уст-во по Ляпунову в-во. Если: $\exists V$: 1) $V \in C^2(\|Y\| < R)$; 2) $V > 0, V(0) = 0$; 3) $\frac{dV(Y(t))}{dt} \leq 0, \|Y\| < R$.
 Кор: если $Y(t, Y_0)$ - реш $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$, то а) $\forall \epsilon \exists \delta: \|Y_0\| < \delta, \text{ то } \|Y(t, Y_0)\| < \epsilon \forall t \in (0; \omega)$
 б) где $\|Y_0\| < \delta: \omega = +\infty$

Покажем а).



Берём $V \in [0, R]$ (где $R < R$)

1) рисуем окружность радиуса ϵ в (y_1, y_2)

2) берём её проекцию на пов-ть $V(Y)$.

3) находим $V_{min} = \min_{\|Y\| = \epsilon} V(Y)$ (**)

4) находим $\delta: V(Y) < V_{min}$ где $\|Y\| < \delta$ (*)

Для этого δ выполняется пункт а).

От противного:

Пусть $\exists Y_0: \|Y_0\| < \delta$,

$\exists \hat{t} \in (0, \omega): \|Y(\hat{t}, Y_0)\| = \epsilon$

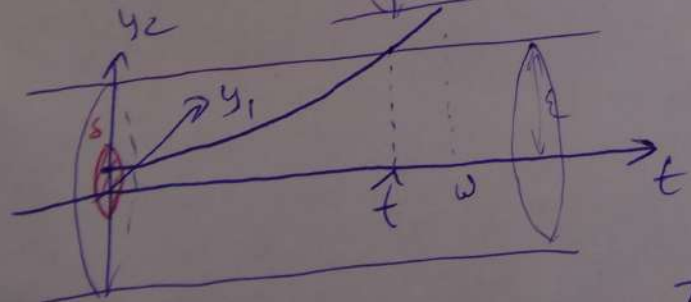
$\forall t \in (0, \hat{t}) \|Y(t, Y_0)\| < \epsilon$

$$\frac{dV(Y(t))}{dt} \leq 0 \quad 0 < \hat{t}$$

$$\begin{aligned} V_{min} & \leq V(Y_0) = V(Y(0)) \geq V(Y(\hat{t})) \geq V_{min} \\ & \text{при } \|Y_0\| < \delta \text{ и } \|Y(\hat{t})\| = \epsilon \end{aligned}$$

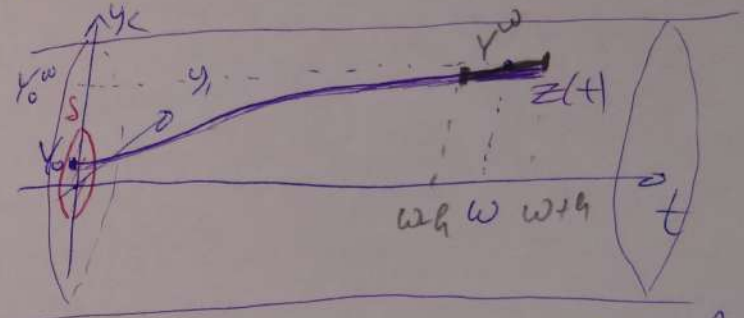
противоречие $\Rightarrow$

$$\nexists \hat{t}: \|Y(\hat{t}, Y_0)\| = \epsilon \Rightarrow \forall t \in (0, \omega) \|Y(t, Y_0)\| < \epsilon$$



б) Мажо: $Y(t, Y_0)$ определено $g_0 + \delta$; если $\|Y_0\| < \delta$.

$$Y(t, Y_0) \text{ — решение } \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$



от которого: $\omega < \delta$

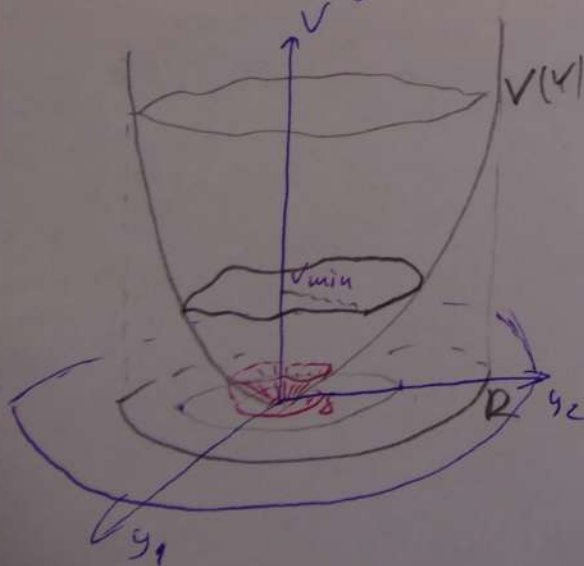
$$Y_0^\omega = \lim_{t \rightarrow \omega} Y(t)$$

$(\omega, Y_0^\omega) \in D \Rightarrow \exists$ решение $Y^\omega(t)$ $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(\omega) = Y_0^\omega \end{cases}$, определено на $[\omega - h, \omega + h]$

$$Z(t) = \begin{cases} Y(t), & t \in (\alpha, \omega) \\ Y^\omega(t), & t \in [\omega, \omega + h] \end{cases} \Rightarrow Z(t) \text{ — решение } \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow \omega = \delta.$$

$\Rightarrow$ м.н. р-е уст-во.

ЧТД



а) Возьмем $\varepsilon \geq R$.

1) Возьмем проекцию окружности $\|Y\| = R/2$ на V

$$V_{\min} = \min_{\|Y\| = R/2} V(Y)$$

2) найдем δ : $V(Y) < V_{\min}$ $\|Y\| < \delta$

тогда $\forall t \in (0; \omega)$ $\|Y\| < R/2 < R < \varepsilon$

Пусть δ достаточно мало

ЧТД

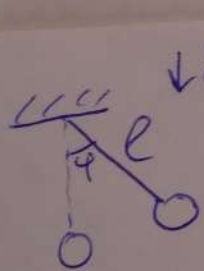
Прим. $\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{иссл. по уст.}$

1), 2) $V = x^2 + y^2$; $2x^{2k} + \beta y^{2m}$; $\ln(x^2 + y^2 + 1)$

3) $\langle \nabla V, F \rangle \leq 0 \quad \|Y\| < R$;
 Возьмем $V(x, y) = x^2 + y^2$: $\nabla V = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x \end{pmatrix}$

$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = -2xy - 2x^4 + 2xy = -2x^4 \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 н.р. уст.-до

Прим



$\downarrow g \quad e\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0, \quad \varphi \equiv 0$

$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \dot{\varphi}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = \ddot{\varphi} = -\frac{g}{e} \sin \varphi = -\frac{g}{e} \sin x \end{cases}$

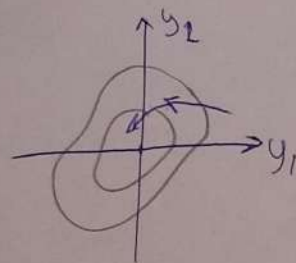
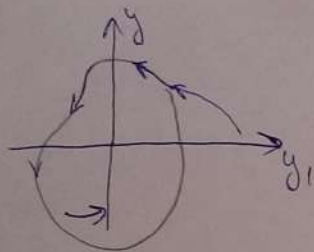
$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{e} \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{иссл} \\ \text{по уст} \end{matrix}$

$V(x, y) = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m(\dot{\varphi}e)^2}{2} + mg(l - l \cos \varphi) = \frac{my^2 e^2}{2} + mg(l - l \cos x)$

$\|V\| \in \mathbb{C}^1 \quad 2) \|(x, y)\| < \frac{\pi}{2} \quad V(Y) \geq 0, \quad V(Y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0$

3) $\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} mg e \sin x \\ my e^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{e} \sin x \end{pmatrix} \right\rangle = y mg e \sin x - my e \sin x = 0$

Т.о. $V(x, y) = \frac{my^2 e^2}{2} + mg(l - l \cos x)$, о минимуме грав $\|(x, y)\| < \frac{\pi}{2}$,
 удовлет.-ет уст.-ам φ -м Леммы $\Rightarrow$ н.р. уст.-до

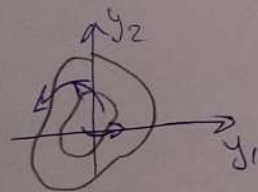


Тл Лемма об асимптотической устойчивости

Если существует ф-ия $V(Y)$, определённая на $\|Y\| < R$, со св-ми:

- 1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$;
- 2) $V(Y) \geq 0, \|Y\| < R; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle < 0, 0 < \|Y\| < R$,

тогда нул. реш. ас. уст-во.

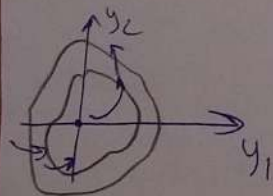


Тл Лемма о неустойчивости

Если существует ф-ия $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\| < R$, со св-ми:

- 1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$
- 2) $V(Y) \geq 0, \|Y\| < R; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$;
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0, 0 < \|Y\| < R$,

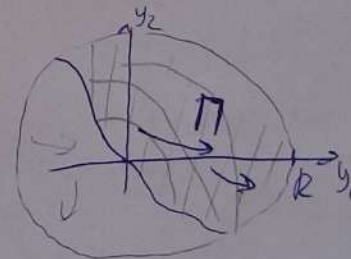
тогда нул. реш. неустойчиво.



Тл Четаева

Если существует ф-ия $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\| < R$, существует область $\Pi \subset \{ \|Y\| < R \}$, т.е. $0 \in \partial \Pi$,

- 1) $V \in C^1(\Pi)$
- 2) $V(Y) > 0, Y \in \Pi; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y \in \partial \Pi \cap \{ \|Y\| < R \}$
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0$ где $Y \in \Pi$,



тогда нул. реш. неустойчиво

Замеч. В частном случае, если $\Pi = \{ 0 < \|Y\| < R \} \Rightarrow$ получаем Тл Лемма об асимптотической устойчивости.



- с со св-ми:
- 1) $V \in C^1(\Pi)$
 - 2) $V(Y) \geq 0, \|Y\| < R; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0,$
 - 3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0 \quad 0 < \|Y\| < R,$

тогда нуль неустойчиво.

Тл Четаева

Если существует ф-ия $V(Y)$, определенная на шаре $\|Y\| < R$,
 из области $\Pi \subset \{ \|Y\| < R \}$, т.е. $0 \in \partial \Pi$,

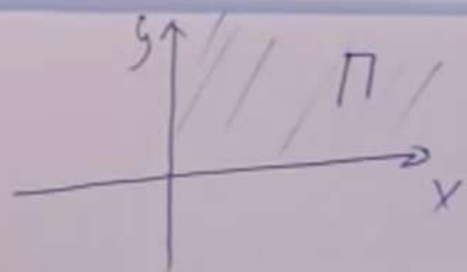
- 1) $V \in C^1(\Pi)$
- 2) $V(Y) > 0 \quad Y \in \Pi; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y \in \partial \Pi \cap \{ \|Y\| < R \}$
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0$ где $Y \in \Pi$,

тогда нуль неустойчиво

Замеч. В частном случае, если $\Pi = \{ 0 < \|Y\| < R \} \Rightarrow$ получаем Тл Ляпунова о неуст-ти.

Пример $\begin{cases} \dot{x} = xy^2 \\ \dot{y} = x^2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - иссл
 на уст.

$$\Pi = \{ x > 0, y > 0 \}$$



$$V(x, y) = xy$$

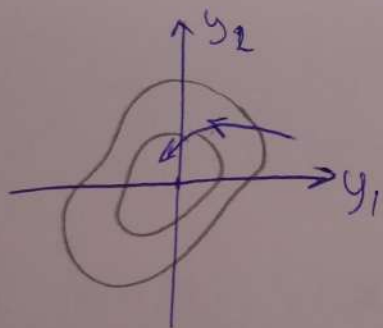
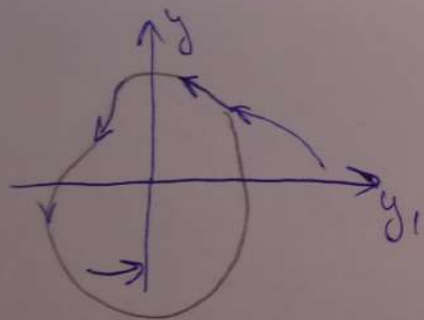
$$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix} \right\rangle = xy^3 + x^3y = xy(x^2 + y^2) > 0 \quad \text{в } \Pi$$

$\Rightarrow$ нуль неуст по Тл Четаева.

Тл Леммова об уст-тл

Если существует ф-ия $V(Y)$, определённая на $\|Y\| < R$, со св-ми:

- 1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$;
 - 2) $V(Y) \geq 0$ $\|Y\| < R$; $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$;
 - 3) $\langle \nabla V, F \rangle \leq 0$ $\|Y\| < R$,
- тогда нул. реш. уст-во по Леммове.

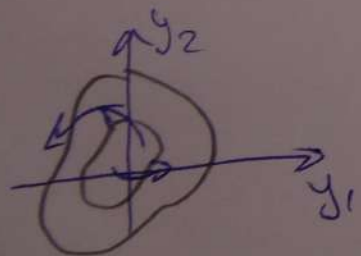


Тл Леммова об асимптотической уст-тл

Если ~~существует~~ существует ф-ия $V(Y)$, определённая на $\|Y\| < R$, со св-ми:

- 1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$;
- 2) $V(Y) \geq 0$, $\|Y\| < R$; $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$;
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle < 0$ $0 < \|Y\| < R$,

тогда нул. реш. ас. уст-во.



Тл Леммова о неустойчивости

Если существует ф-ия $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\| < R$, со св-ми:

- 1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$;
- 2) $V(Y) \geq 0$, $\|Y\| < R$; $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$;
- 3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0$ $0 < \|Y\| < R$,

тогда нул. реш. неустойчиво.

Тл Четаева

$V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\| < R$,