

§ 6 Квадратные функции Ляпунова

$Y' = AY$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - постоянная, $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ - собств. числа matr A .
 $Y(t) \equiv 0$ - мул. реш - иссл. ма уст-тв.

Теорема (о асимптотической уст-ти)

Мул. реш $Y' = AY$ асимптотич уст-во $\Leftrightarrow \forall \lambda(A) \operatorname{Re} \lambda < 0$.

Тл (Ляпунова об асимптотической уст-ти)

Если $\exists$ ф-ия $V(Y)$, определённая где $\|Y\| < R$, со св-ми:

1) $V \in C^1(\|Y\| < R)$;

2) $V \geq 0$ $\|Y\| < R$; $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$;

3) $\nabla V, AY < 0$, $0 < \|Y\| < R$;

то мул. реш сист $Y' = AY$ асимптотич. уст-во.

Тл (существование ф-ии Ляпунова для линейной системы с постоянными coeff-ми)

Если $\forall \lambda(A): \operatorname{Re} \lambda < 0$, то существует функция Ляпунова $V(Y)$ системы $Y' = AY$ в виде квадратичной формы:

$$V(Y) = \langle HY, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} y_i y_j, \quad H = \{h_{ij}\} - \text{постоянная matr,}$$

т.е. $H = H^T > 0$,

$$\nabla V, AY = -\|Y\|^2.$$

Доп-во. Имеем: $\exists \lambda > 0 : \operatorname{Re} \lambda < -\lambda < 0$.

Можно: $\exists$ матрица H со св-ми: 1) $H = H^T > 0$,
2) $\langle \nabla V, AY \rangle = -\|Y\|^2$,

тогда ф-на $V = \langle H Y, Y \rangle$ - ф-на Ляпунова.

Возьмем $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ $Y(t)$ - реш ЗК, определено $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\langle \nabla V(Y(t)), AY(t) \rangle = \frac{dV(Y(t))}{dt} \Rightarrow \frac{dV(Y(t))}{dt} = -\|Y\|^2$$

$$\frac{d \langle H Y(t), Y(t) \rangle}{dt} = -\|Y\|^2;$$

$$\langle H Y'(t), Y(t) \rangle + \langle H Y(t), Y'(t) \rangle = -\|Y\|^2$$

$$\langle H A Y, Y \rangle + \langle H Y, A Y \rangle = -\|Y\|^2$$

$$\langle H A Y, Y \rangle + \langle A^T H Y, Y \rangle = -\langle E Y, Y \rangle$$

$$\langle (H A + A^T H + E) Y, Y \rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\text{при } t=0: \langle \overbrace{(H A + A^T H + E)}^M Y_0, Y_0 \rangle = 0 \quad \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$1) M = M^T: M^T = (H A + A^T H + E)^T = (H A)^T + (A^T H)^T + E^T =$$

$$= A^T H^T + H^T A + E = A^T H + H A + E = M, \text{ если } M \text{ симметрична.}$$

$$2) \text{ Если } Y_0 - \text{в.в. } M = 0 \Rightarrow \langle M Y_0, Y_0 \rangle = \langle \lambda Y_0, Y_0 \rangle = \lambda \|Y_0\|^2 \Rightarrow \lambda = 0 - \text{Все собственные значения } M = 0$$

$$\Rightarrow M = 0 \Rightarrow H A + A^T H + E = 0 - \text{матричное уравнение Ляпунова}$$

$$e^{At} \cdot | HA + A^T H = -E | \cdot e^{At}$$

$$e^{At} H A e^{At} + \frac{e^{At} A^T H e^{At}}{(e^{At})'} = -e^{At} e^{At}$$

(even $AA^T \neq A^T A \Rightarrow e^{At} e^{At} \neq e^{(A^T+A)H}$)

$$e^{At} H (e^{At})' + (e^{At})' H e^{At} = -e^{At} e^{At}$$

$$(e^{At} H e^{At})' = -e^{At} e^{At} \Big| \int_0^t$$

$$e^{At} H e^{At} - H = - \int_0^t e^{As} e^{As} ds$$

при $t \rightarrow +\infty$ оценить $\|e^{At}\|_1$: e^{At} - ФМР $Y' = AY \Rightarrow$
 $e^{At} = (Y'(t); \dots; Y^n(t)) \Rightarrow \|e^{At}\|_1 = \max \{ \|Y'(t)\|_1, \dots, \|Y^n(t)\|_1 \}$

$\|Y\|_1 = \max \{ |y_1|, \dots, |y_n| \}$; $Y(t) = c_1 H_0 e^{\lambda t} + c_2 (H_0 t + H_{up}) e^{\lambda t} + \dots$
 $y(t) = a_1 e^{\lambda t} + a_2 t e^{\lambda t} + \dots$

$\operatorname{Re} \lambda < -\alpha < 0$
 $|y(t)| < \tilde{C} e^{\lambda t} < \tilde{C} e^{-\alpha t} \Rightarrow$
 при достаточно t

$$\|Y\|_1 < \tilde{C} e^{-\alpha t}$$

$$\|e^{At}\|_1 < C e^{-\alpha t} \Rightarrow \|e^{At}\|_1 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

$$\|e^{At} H e^{At}\|_1 \leq \|e^{At}\|_1 \cdot \|H\|_1 \cdot \|e^{At}\|_1 < C^2 e^{-2\alpha t} \|H\|_1 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow e^{At} H e^{At} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

(3)

Реш $A^T H + H A = -E$

$H = \int_0^\infty e^{A^T s} e^{As} ds$ - guess and

$V = \langle H Y, Y \rangle : \langle \nabla V, A Y \rangle = -\|Y\|^2$
 $\int_0^t \|e^{A^T s} e^{As}\| ds \leq \int_0^t \|e^{A^T s}\| \cdot \|e^{As}\| ds < \int_0^t c^2 e^{-2\lambda s} ds = c^2 \frac{e^{-2\lambda s}}{-2\lambda} \Big|_0^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{c^2}{2\lambda}$

Проверим: $H = H^T$: $H^T = \left(\int_0^\infty e^{A^T s} e^{As} ds \right)^T = \int_0^\infty (e^{A^T s} e^{As})^T ds =$
 $= \int_0^\infty (e^{As})^T (e^{A^T s})^T ds = \int_0^\infty e^{A^T s} e^{As} ds = H$

Проверим: $H > 0$: $\forall Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\langle H Y, Y \rangle = \langle \int_0^\infty e^{A^T s} e^{As} ds Y, Y \rangle =$
 $= \int_0^\infty \langle e^{A^T s} e^{As} Y, Y \rangle ds = \int_0^\infty \langle e^{As} Y, e^{As} Y \rangle ds = \int_0^\infty \|e^{As} Y\|^2 ds$
 $\Rightarrow \langle H Y, Y \rangle > 0$ при $Y \neq 0$.

Тогда $V(Y) = \langle H Y, Y \rangle$: 1) $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$
 2) $V(Y) \geq 0$, $V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$
 $\forall Y \in \mathbb{R}^n$

3) $\langle \nabla V, A Y \rangle = -\|Y\|^2 < 0$
 $\Rightarrow V(Y)$ - φ -me $\Rightarrow$ $Y' = AY$. чтд

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases} \quad Y' = AY \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2}(A) = -1$

$V(x, y) = h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 : \angle \nabla V, AY > = -\|Y\|^2$

$\left\langle \begin{pmatrix} 2h_{11}x + 2h_{12}y \\ 2h_{12}x + 2h_{22}y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix} \right\rangle = -x^2 - y^2$

$-6h_{11}x^2 + 4h_{11}xy - 6h_{12}xy + 4h_{12}y^2 - 4h_{12}x^2 - 4h_{22}xy + 2h_{12}xy + 2h_{22}y^2 = -x^2 - y^2$

$x^2: -6h_{11} - 4h_{12} = -1$

$y^2: 4h_{12} + 2h_{22} = -1$

$xy: 4h_{11} - 6h_{12} - 4h_{22} + 2h_{12} = 0$

$h_{11} = 3/2$

$\Rightarrow h_{12} = 2$

$h_{22} = 7/2$

$\Rightarrow V(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 4xy + \frac{7}{2}y^2$

$H > 0$

φ-мел
периодический

§7 Устойчивость по первому приближению

$$Y' = F(Y) \quad F: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D - \text{откр}; \quad F \in C^1(D)$$

$0 \in D, \quad F(0) = 0 \Rightarrow Y(t) \equiv 0$ - реш - иссл на уст-ть.

$$F(Y) = \underbrace{F(0)}_0 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{Y=0}}_{B - \text{мат}} Y + \underbrace{g(Y)}_{g(Y) = o(\|Y\|)}$$

$$\frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} \xrightarrow{\|Y\| \rightarrow 0} 0$$

$$Y' = F(Y) \quad Y' = BY + o(\|Y\|)$$

$Y' = BY$ - система первого приближения
линеаризованная система

Тл (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)

I) Если $\forall \lambda(B): \operatorname{Re}(\lambda) < 0$, то муд. реш $Y' = F(Y)$ асимпт. уст.

II) Если $\exists \lambda(B): \operatorname{Re}(\lambda) > 0$, то муд. реш $Y' = F(Y)$ неустойчиво.

// Если $\forall \lambda(B) \operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $\exists \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda = 0$, то Тл ничего не утверждает

Док-во. (I) (II - без доп. до)

Пусть $\forall \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow$ то $\exists$ ф-ия Ляпунова g где $Y' = BY$
 $\exists$ ф-ия Ляпунова в B где: $V(Y) = \langle HY, Y \rangle$, при этом: $H = H^T > 0$,
 $\langle \nabla V, BY \rangle = -\|Y\|^2$. (т.е. $HB + B^T H = -E$)

Покажем, что эта ф-ия $V(Y)$ - ф-ия Ляпунова где $Y' = F(Y)$, т.е.
 $\langle \nabla V, F(Y) \rangle < 0$ где $\|Y\| < \delta$.

Возьмём $Y_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} Y(t) - \text{реш } \exists k$

$$\begin{aligned} \langle \nabla V, F(Y) \rangle &= \frac{d}{dt} (V(Y(t))) = \frac{d}{dt} \langle HY(t), Y(t) \rangle = \langle HY', Y \rangle + \langle HY, Y' \rangle = \\ &= \langle HF(Y), Y \rangle + \langle HY, F(Y) \rangle = \langle H(BY + g(Y)), Y \rangle + \langle HY, BY + g(Y) \rangle = \\ &= \langle HBY, Y \rangle + \langle Hg(Y), Y \rangle + \langle HY, BY \rangle + \langle HY, g(Y) \rangle = \\ &= \langle (HB + B^T H)Y, Y \rangle + 2\langle HY, g(Y) \rangle = -\langle Y, Y \rangle + 2\langle HY, g(Y) \rangle \leq -\|Y\|^2 + \\ &+ 2\|H\| \cdot \|Y\| \cdot \|g(Y)\| = -\|Y\|^2 \left(1 - \underbrace{2\|H\|}_{\text{число}} \cdot \frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} \right) \end{aligned}$$

Т.к. $\frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} \rightarrow 0$ по $\|Y\| \rightarrow 0$, то $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon): \|Y\| < \delta$, то $\frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} < \varepsilon$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\|H\|} \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon): \frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} < \frac{1}{4\|H\|}$ где $\|Y\| < \delta$
 $2\|H\| \cdot \frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} < \frac{1}{2}; 1 - 2\|H\| \cdot \frac{\|g(Y)\|}{\|Y\|} > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \langle \nabla V, F(Y) \rangle < -\frac{1}{2}\|Y\|^2 < 0$ где $\|Y\| < \delta \Rightarrow V(Y) = \langle HY, Y \rangle$ - ф-ия Ляпунова где $Y' = F(Y)$; $Y=0$ - ас. уст. $\forall t \in \mathbb{R}$

§ 8. Уст-ть положение равновесие.

$$Y' = F(Y), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

Опр. $Y(t) = Y^*$ - положение равновесие, если $F(Y^*) = 0$;
т.е. $Y(t) = Y^*$ - стационарное решение сист $Y' = F(Y)$.

$$F(Y) = \underbrace{F(Y^*)}_0 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{Y=Y^*}}_B (Y - Y^*) + \underbrace{g(Y - Y^*)}_{O(\|Y - Y^*\|)}$$

$$Y' = F(Y) \quad Y' = B(Y - Y^*) + O(\|Y - Y^*\|)$$

Th (об асимпт. уст-ти положение равновесие по 1 приближению).
I) Если $\forall \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow Y(t) \equiv Y^*$ - ас. устойчивое реш $Y' = F(Y)$.
II) Если $\exists \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow Y(t) = Y^*$ - неустойч. реш $Y' = F(Y)$.

III) Если $\exists \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda = 0$, все остальные $\lambda(B): \operatorname{Re} \lambda < 0$ - Th не совсем утверждает.

D-во: замена $Z(t) = Y(t) - Y^* \Rightarrow Z' = BZ + O(\|Z\|)$
Если $\forall \lambda(B) \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow$ мул. реш $Z' = BZ + O(\|Z\|)$
асимпт уст $\Rightarrow Y' = F(Y)$
 $Y(t) = Y^*$ ас. уст
Если $\exists \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow$ мул. реш $Z' = BZ + O(\|Z\|)$
неуст $\Rightarrow Y' = F(Y)$
 $Y(t) = Y^*$ неуст. реш
ЧТД.

Уточ:

$$Y' = AY + B(t), \quad A - \text{мат}$$

1.

$$a) \forall \lambda(A): \operatorname{Re} \lambda < 0 \Leftrightarrow \text{все реш } Y' = AY + B(t) \text{ асимпт. уст.}$$

$$б) \exists \lambda(A): \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow \text{все реш } Y' = AY + B(t) \text{ неуст}$$

$$в) \forall \lambda(A): \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \exists \lambda(A): \operatorname{Re} \lambda = 0:$$

$$i) \lambda \text{ имеет только } \omega \text{ в-ря} \Rightarrow \text{все реш уст-вы}$$

$$ii) \lambda \text{ имеет нулевые в-ря} \Rightarrow \text{все реш неуст.}$$

$$2. Y' = A(t)Y + B(t)$$

$$a) \text{ все реш } Y' = A(t)Y \text{ орг борово} \Leftrightarrow \text{все реш } Y' = A(t)Y + B(t) \text{ уст-вы}$$

$$б) \text{ все реш } Y' = A(t)Y: \lim_{t \rightarrow \infty} \|Y\| = 0 \Leftrightarrow \text{все реш } Y' = A(t)Y + B(t) \text{ асимпт. уст}$$

$$3. Y' = F(Y) \quad Y(t) \equiv 0 - \text{реш}$$

$$I. B = \frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{Y=0}$$

$$a) \forall \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow Y(t) \equiv 0 - \text{асимпт. уст. реш } Y' = F(Y)$$

$$б) \exists \lambda(B): \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow Y(t) \equiv 0 - \text{неуст реш } Y' = F(Y)$$

$$II. \exists V(Y), \text{ непрерывная на } \|Y\| < R, \text{ т.е. } V \in C^1(\|Y\| < R), \\ V \geq 0, \|Y\| < R; V(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0,$$

$$a) \langle \nabla V, F(Y) \rangle < 0 \Rightarrow Y = 0 - \text{асимпт. уст. реш } Y' = F(Y)$$

$$б) \langle \nabla V, F \rangle \leq 0 \Rightarrow Y = 0 - \text{уст. реш } Y' = F(Y)$$

$$в) \langle \nabla V, F \rangle > 0 \Rightarrow Y = 0 - \text{неуст реш } Y' = F(Y)$$