§ 9 Фазовые траектории автономных систем

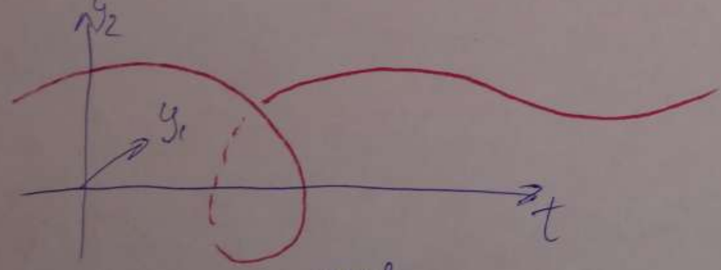
(1) $Y' = F(Y)$ – автономная система (нет t в явном виде); $Y = Y(t)$
$F(Y) \subset C^1(\mathbb{R}^n)$

$Y(t)$ – реш, определённое на (α, ω)

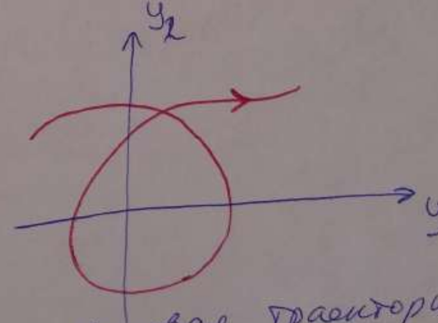
$\{(t, y_1(t), \dots y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$ – интегральная кривая (в $\mathbb{R}^{n+1}$)

$\{(y_1(t), \dots y_n(t)), t \in (\alpha, \omega)\}$ – фазовая траектория (в $\mathbb{R}^n$) – проекция интегральной кривой на фазовое пр-во $\{y_1, \dots y_n\}$.

– параметрич. заданная кривая



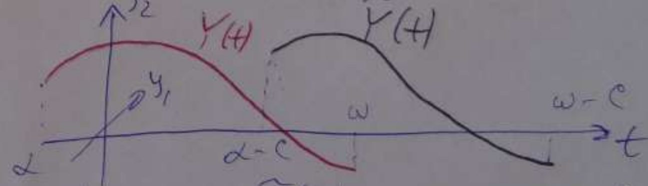
инт. крив



фазовая траектория

<u>Лемма 1</u> (основное св-во автономных систем)

Пусть $Y(t)$ – непрод реш сист (1), опред на (α, ω), тогда $\forall c \in \mathbb{R}$ $\tilde{Y}(t) = Y(t+c)$ – тоже непрод реш. сист (1), определённое на $(\alpha - c, \omega - c)$.



Д-во: $Y(t)$ – реш $\Rightarrow Y'(t) \equiv F(Y(t))$.

$\tilde{Y}'(t) = Y'(t+c) = F(Y(t+c)) = F(\tilde{Y}(t))$ $\forall t$

$\Rightarrow \tilde{Y}(t)$ – реш: $Y' = F(Y)$

$Y(t)$ опред на (α, ω) $\Rightarrow t + c \in (\alpha, \omega) \Rightarrow t \in (\alpha - c, \omega - c)$, т.е $\tilde{Y}(t)$ опред на $(\alpha - c, \omega - c)$

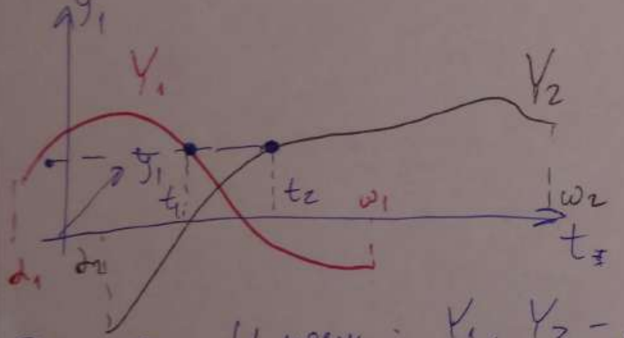
ЧТД

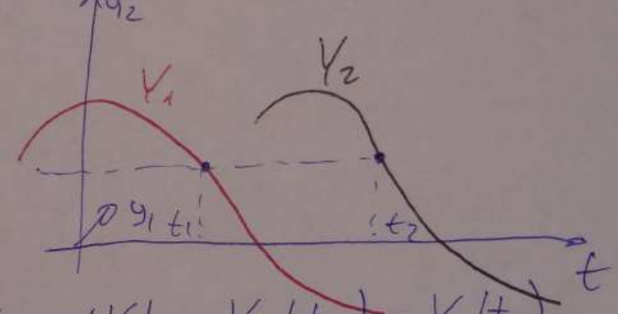
Лемма 2 Пусть $Y_1(t)$ - непрод реш $Y'=F(Y)$, опр (α_1, ω_1)

$Y_2(t)$ - непрод реш $Y'=F(Y)$, опр (α_2, ω_2)

$\exists\, t_1 \in (\alpha_1, \omega_1)$, $t_2 \in (\alpha_2, \omega_2)$: $Y_1(t_1) = Y_2(t_2)$,

тогда $Y_2(t) = Y_1(t + t_1 - t_2)$





Док-во. Имеем: Y_1, Y_2 - реш $Y'=F(Y)$, $Y_1(t_1) = Y_2(t_2)$

I) Обозначим $\tilde{Y}(t) = Y_1(t + t_1 - t_2) \Rightarrow \tilde{Y}(t)$ - реш $Y'=F(Y)$, $t \in (\alpha_1 - t_1 + t_2, \omega_1 - t_1 + t_2)$

II) $\tilde{Y}(t)$, $Y_2(t)$ - реш $Y'=F(Y)$

$\tilde{Y}(t_2) = Y_1(t_1)$ $\Rightarrow$ обе в-ор ф-ии реш ЗК $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(t_2) = Y_1(t_1) \end{cases}$

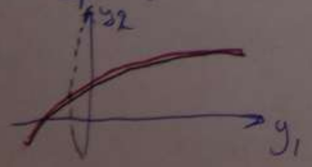
$Y_2(t_2) = Y_1(t_1)$

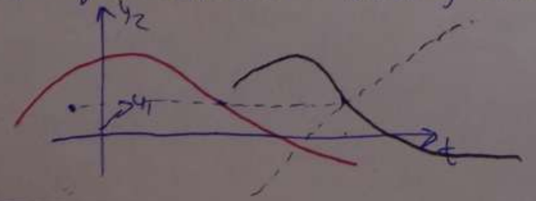
$\Rightarrow Y_2(t) = \tilde{Y}(t)$, $t \in (\alpha_1 - t_1 + t_2, \omega_1 - t_1 + t_2)$

ЧТД

$Y_2(t) = Y_1(t + t_1 - t_2)$.

Следств. Если траектории 2-х решений пересекаются в одной точке, то графики этих решений получаются сдвигом один из другого, траектории совпадают

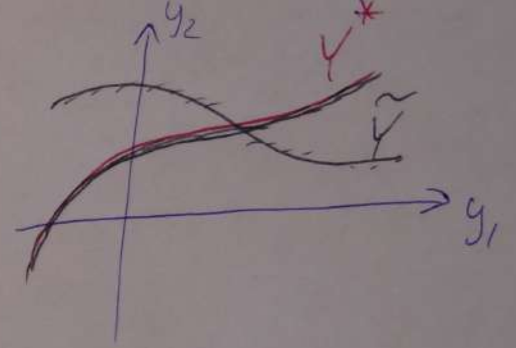




Th 1 Траектории автономных систем либо не пересекаются, либо совпадают.

Д-во. Пусть $Y^*(t)$ – непрод реш $Y'=F(Y)$, опред (α^*,ω^*).

$\tilde{Y}(t)$ – непрод реш $Y'=F(Y)$, опред $(\tilde{\alpha},\tilde{\omega})$



Если траектории пересекаются, то:

$\exists t^*\in(\alpha^*,\omega^*)$, $\exists \tilde{t}\in(\tilde{\alpha},\tilde{\omega})$:

$$\left(y_1^*(t^*),\dots y_n^*(t^*)\right)=\left(\tilde{y}_1(\tilde{t}),\dots \tilde{y}_n(\tilde{t})\right)$$

$$Y^*(t^*)=\tilde{Y}(\tilde{t})$$

из предыд. леммы: $Y^*(t)=\tilde{Y}(t+\tilde{t}-t^*)$

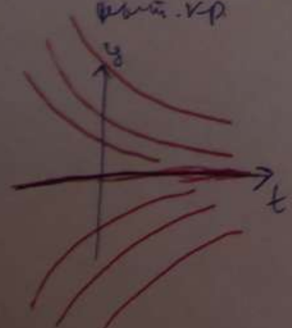
$$(\alpha^*,\omega^*)=(\tilde{\alpha}-\tilde{t}+t^*,\ \tilde{\omega}-\tilde{t}+t^*)$$

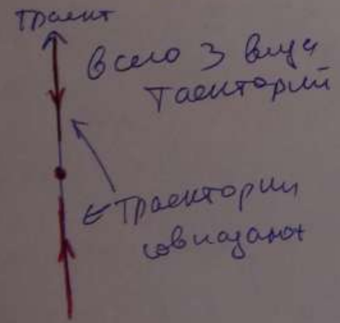
$$\left(y_1^*(t),\dots y_n^*(t)\right)=\left(\tilde{y}_1(t+\tilde{t}-t^*),\dots \tilde{y}_n(t+\tilde{t}-t^*)\right)\quad \forall t\in(\alpha^*,\omega^*)$$

т.е. траектории совпадают, если пересеклись в одной точке. ЧТД

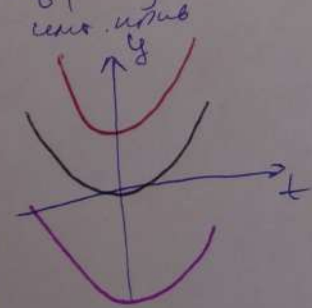
Пример.

а) $y'=-y$ – автон. сист $y(t)=Ce^{-t}$



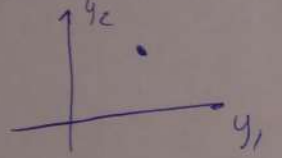
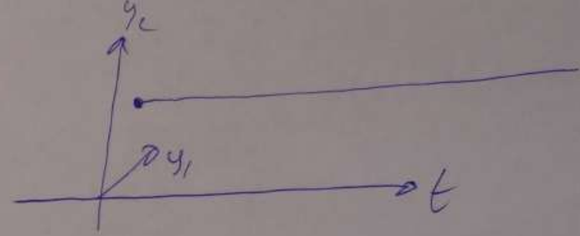


б) $y'=t$ $\quad y(t)=\frac{t^2}{2}+C$

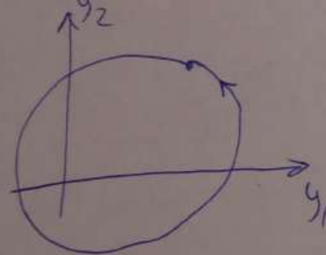


Траектории пересекаются, но не совпадают, т.к. система не автономная.

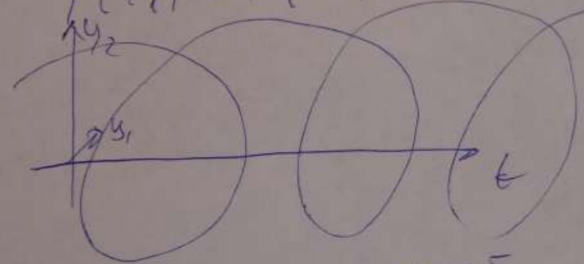
Типы фазовых траекторий автономных систем

1) точка  — соответствует стационарное реш. 

2) гладкая замкнутая кривая (цикл)



$Y(t_1) = Y(t_2)$. Из леммы 1: $Y(t) = Y(t + t_2 - t_1)$

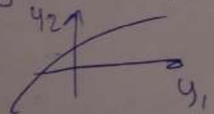


$(\alpha, \omega) = (\alpha - t_1 + t_2, \ \omega - t_1 + t_2) \Rightarrow$

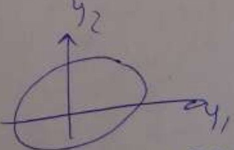
$(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}$

$Y(t)$ — период. ф-ие.

3) гладкая кривая без самопересечений

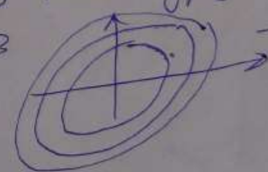


§10 Предельный цикл



Цикл — замкнутая траектория. Предельный цикл — цикл, в окрестности которого нет других замкнутых траект.

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \lambda(A) = \pm i\beta$

 — не предельн. цикл

Опр. Предельный цикл устойчив, если траектории внутри него и снаружи наматываются на него при $t \to +\infty$

неустойчив, если разматываются при $t \to +\infty$

Полуустойчивый — иначе.