

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор — Екатерина Юрьевна Балакина

Программа курса лекций

(3-й семестр, лекции 34 ч., семинары 34 ч., экз.)

1. Уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x, y)$. Определение решения.

Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением, изоклины. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и обобщённо-однородные уравнения. Линейное уравнение. Принцип суперпозиции. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнение в симметричной форме: поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него. Доказательство теоремы Пикара для уравнения первого порядка. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе». Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

2. Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Поведение непродолжаемых решений. Теорема Уинтнера. Уравнение $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности.

3. Общая теория линейных систем

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = A(t)X + B(t)$. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Линейность пространства $\mathcal{L}$ всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = A(t)X$. Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля — Остроградского. Размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A . Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

5. Линейные уравнения высокого порядка

Линейное уравнение n -го порядка, сведение к линейной системе. Изоморфизм между пространствами непродолжаемых решений однородного уравнения и соответствующей системы. Теория линейного уравнения n -го порядка как следствие теории линейных систем. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Метод вариации для отысканий частных решений.

6. Краевые задачи

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи.

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля: существование вещественных собственных значений; размерность пространства собственных функций; ортогональность (с весом) собственных функций; односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи. Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.
6. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
8. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Уравнения первого порядка

- | | |
|--|--------------|
| 1. Поле направлений, изоклины, задача Коши. | 1,5 семинара |
| 2. Уравнения с разделяющимися переменными. | 1 семинар |
| 3. Однородное уравнение. | 1 семинар |
| 4. Линейное уравнение, уравнение Бернулли. | 1,5 семинарf |
| 5. Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель. | 1 семинар |

Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка

- | | |
|--|------------|
| 1. Постановка задачи Коши. Существование и единственность решения. Использование теоремы Пикара. Уравнения, допускающие понижение порядка. | 3 семинара |
|--|------------|

Линейные системы и уравнения высокого порядка

- | | |
|--|--------------|
| 1. Линейные системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента. | 1,5 семинара |
| 2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера. | 2,5 семинара |
| 3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского-Лиувилля. | 1 семинар |

Краевые задачи

- | | |
|---|--------------|
| 1. Прямое решение краевых задач, регулярных и сингулярных. | 0.5 семинара |
| 2. Построение функции Грина и решение с ее помощью краевых задач. | 1 семинар |
| 3. Собственные значения и собственные функции краевых задач. | 0.5 семинара |

Задания по дифференциальным уравнениям

3-й семестр

В течение семестра студент обязан сдать преподавателю в устной форме все задачи из приведённого ниже списка и выполнить три письменные контрольные работы. Не выполнившие это условие не допускаются к экзамену.

Задание 1 (сдать до 23 октября)

1. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{x^3}{y}.$$

С помощью изоклин построить картину решений, найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба.

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{y^2 - xy}{x^2}.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Изобразить прямолинейные интегральные кривые. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0) , если $x_0 \neq 0$?

3. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{-x - 2}{2x + y + 3}.$$

4. Для уравнения

$$y' = 4y \sin^2 x - \sin 2x$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; оценить верхнюю границу его модуля;

б) показать, что $y^*(x)$ — π -периодическая функция.

5. Найти все решения уравнения

$$y' + 2y \operatorname{tg} x = 2 \frac{\cos x}{1 + x^2} \sqrt{y}.$$

6. Найти все решения уравнения

$$y \left(y^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx - x \left(y^2 + \frac{3}{x^2} \right) dy = 0.$$

Задание 2 (сдать до 27 ноября)

1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 2(y')^2 = 2yy'' + y + 2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y(xy'' + y') = x(y')^2(1 - x^4), \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 4. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$xyy'' = x(y'^2) + yy' + y^2.$$

4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y - z, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = x - 2y. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 7y - z, \\ \dot{y} = 2x - 3y - z, \\ \dot{z} = -2x + 2y + 3z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + z, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = -y + z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

7. Найти все вещественнозначные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

8. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{e^t}{\sin t}, \\ \dot{y} = x + y + \frac{e^t}{\cos t}. \end{cases}$$

Задание 3 (сдать до 30 декабря)

1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = -\frac{e^{3x}}{x^2}.$$

2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 30y = xe^{5x}.$$

3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = \sin x + e^{3x}.$$

4. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = x^2 + e^{-2x} + \cos x.$$

5. Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \ln x.$$

6. Найти общее решение уравнения

$$x^2 \ln x y'' - (\ln x + 1)xy' + (\ln x + 1)y = 2x.$$

7. При каких $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in C([0, \pi])$ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) + ay'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение, б) не имеет решений, в) имеет бесконечно много решений?

8. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y = f(x), \\ y(1) = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$$

Построить функцию Грина.

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = \lambda y, \\ y'(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

Программу составила к.ф.-м.н. Е.Ю. Балакина