

881

$$a) \begin{cases} 3(t-1)\dot{y} = y \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi(t) \equiv 0 \\ \text{и ссн.} \\ \text{на } y=0 \end{matrix}$$

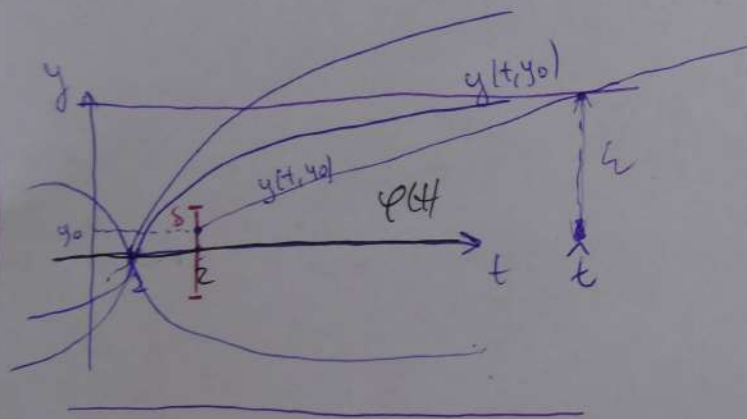
$$\begin{cases} 3(t-1)\dot{y} = y \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

$$y \neq 0 \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1}$$

$$\ln |y| = \frac{1}{3} \ln |t-1| + C$$

$$y = C(t-1)^{1/3}$$

$$y(t, y_0) = y_0(t-1)^{1/3}$$



Например, $\varepsilon = 1$, тогда $\forall \delta$ найдётся $|y_0| < \delta$,
например, $y_0 = \delta/2$, т.е. найдётся $\hat{t}$:

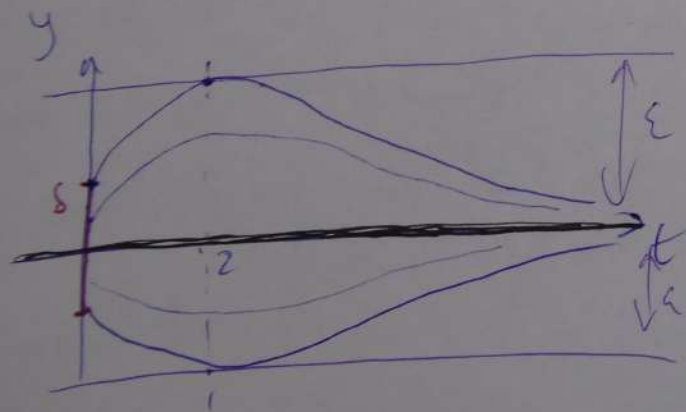
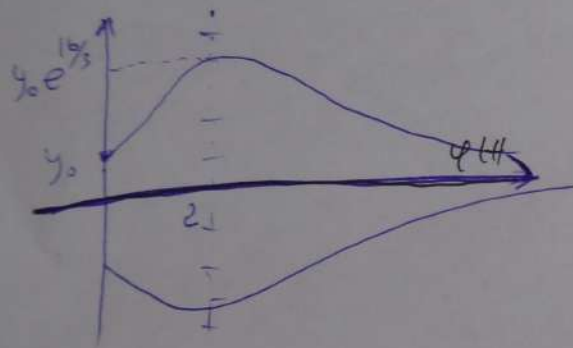
$$|y(t, y_0)| = 1$$

$$|y_0(t-1)^{1/3}| = 1;$$

$$\frac{\delta}{2}(t-1)^{1/3} = 1; \quad \hat{t} = 1 + \frac{8}{\delta^3}$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ неустойчиво.

$$\delta \begin{cases} \dot{y} = 4y - t^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \varphi(t) \equiv 0 \text{ — не ма } y \text{ ос.}$$



$$\begin{cases} \dot{y} = 4y - t^2 y = y(4 - t^2) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t, y_0) = y_0 e^{2 \cdot 4 - \frac{8}{3}} = y_0 e^{16/3}$$

$$\begin{aligned} y &\neq 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (4 - t^2) dt \\ \ln |y| &= 4t - \frac{t^3}{3} + C \\ y &= C e^{4t - \frac{t^3}{3}} \\ y(t, y_0) &= y_0 e^{4t - \frac{t^3}{3}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = y_0 e^{16/3} \Rightarrow y_0 = \varepsilon e^{-16/3} = \delta(\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \varepsilon e^{-16/3} \quad \forall y_0 \quad |y_0| < \delta$$

$$|y(t, y_0)| < \varepsilon \quad \forall t > 0 \Rightarrow$$

мыл. реш $\varphi(t)$ уст-во,
асимпт. уст.

$$b) \begin{cases} \dot{y} = t - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \varphi(t) = 2e^{-t} + t - 1; \quad \begin{cases} \dot{y} = t - y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

исс. на уст.

$$y_{00}: y' = -y \quad y_{00} = Ce^{-t}$$

$$y_{\text{part}} = At + B \quad A = t - At - B$$

$$y(t) = Ce^{-t} + t - 1 \quad \begin{cases} A = -B \\ 1 - A = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} B = -1 \\ A = 1 \end{matrix}$$

$$y_0 = C - 1$$

$$y(t, y_0) = (y_0 + 1)e^{-t} + t - 1$$

$$\text{Замена: } z(t) = y(t) - \varphi(t) = y(t) - 2e^{-t} - t + 1$$

$$z' = y' + 2e^{-t} - 1 = t - y + 2e^{-t} - 1 = -z$$

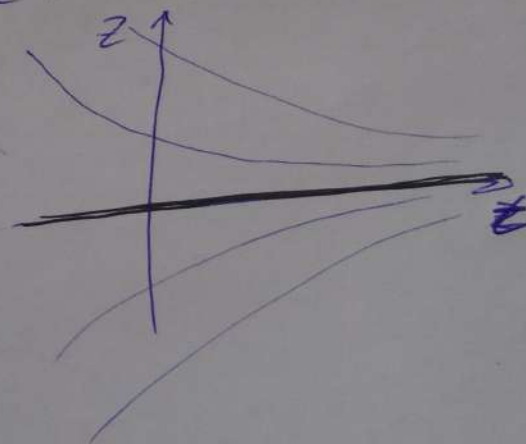
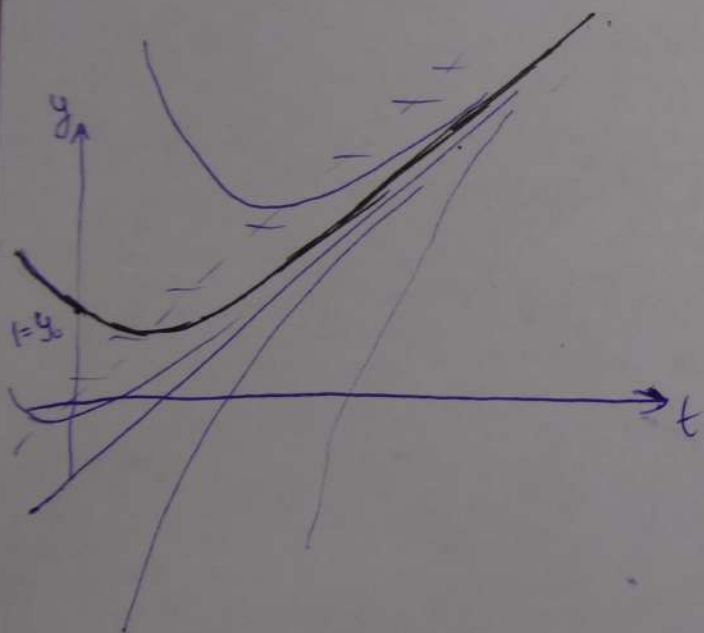
$$z(0) = y(0) - \varphi(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} z' = -z \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad z(t) \equiv 0$$

$$z(t) = y(t) - \varphi(t) = 0, \text{ ас. уст.}$$

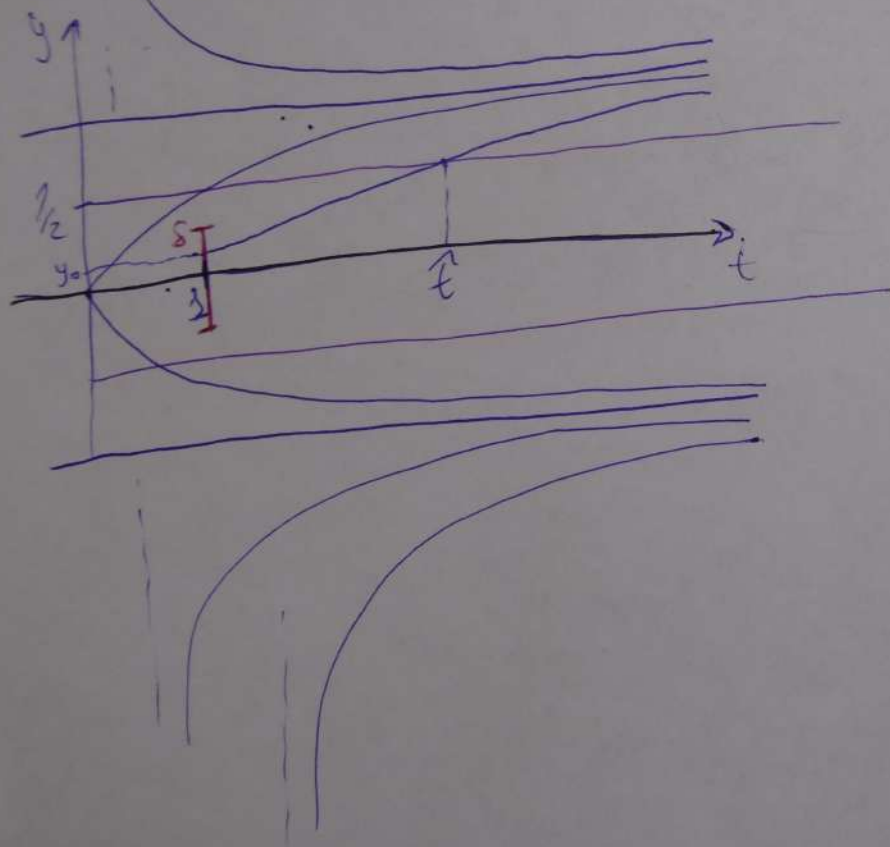
$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) \text{ уст. к } y, \text{ ас. уст.}$$



$$2) \begin{cases} 2t\dot{y} = y - y^3 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \varphi(t) \equiv 0$$

успех на
успех



$$\begin{cases} 2t\dot{y} = y - y^3 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

$$y = \pm 1, y = 0$$

$$y \neq \pm 1, y \neq 0$$

$$\int \frac{2dy}{y-y^3} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{2dy}{y} + \int \frac{-dy}{y-1} + \int \frac{-dy}{y+1} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{y^2}{y^2-1} = Ct; \quad C = \frac{y_0^2}{y_0^2-1}$$

$$y^2(Ct-1) = Ct$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{Ct}{Ct-1}} \quad y = \pm \sqrt{\frac{t}{t-1/C}}$$

$$y(t, y_0) = \pm \sqrt{\frac{t}{t + (1/y_0^2 - 1)}}$$

и.а. рен неустойчиво.

$$Y' = F(t, Y)$$

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

φ - искома уст-во.

$$Z(t) = Y(t) - \varphi(t) \Rightarrow Z' = A(t)Z$$

Мож. реш $Y' = A(t)Y$ уст-во $\Leftrightarrow$ все реш $Y(t)$ $Y' = A(t)Y$ ограничены
выраво

$$\exists M : \|Y(t)\| < M \quad \forall t > 0$$

Мож. реш $Y' = A(t)Y$ ас. уст $\Leftrightarrow$ все реш $Y(t)$ $Y' = A(t)Y$ $\|Y(t)\| \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty$

$$Y' = AY \quad A - \text{пост. матрица} \quad \lambda(A) - \text{с.з.}$$

$$Y(t) = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 (K_2 t + K_{2p}) e^{\lambda_2 t} + \dots$$

Th 1. $\forall \lambda(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \Leftrightarrow$ н.р. ас. уст.

Th 2. $\exists \lambda(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow$ н.р. неуст.

Th 3. $\forall \lambda(A) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \exists \lambda(A) : \operatorname{Re} \lambda = 0 :$

I) $\forall \lambda(A) \operatorname{Re} \lambda = 0$ соотв. могут иметь разн ≤ 1 (нет нулев. в-ва)

$\Rightarrow$ н.р. уст-во.

II) $\exists \lambda(A) \operatorname{Re} \lambda = 0$ соотв. могут иметь разн > 1 (есть нулев. в-ва)

$\Rightarrow$ н.р. неуст.

$$1) \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - точка равновесия}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = (1 - \lambda)^2 - 4 = (-1 - \lambda)(+3 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = +3$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 = \text{tr} A$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3 = \det A$$

$\text{Re } \lambda_1 > 0 \Rightarrow$ неустойчивая точка
 $H_0 e^{3t}$ - экспоненциальный рост

$$2) \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} A = -2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\det A = 1 \quad \text{устойчивая спираль}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - точка равновесия}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} A = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\det A = 4 = \lambda_1 \lambda_2$$

$\text{Re } \lambda = 0 \Rightarrow$ центр

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 H_1^1 e^{2it} + C_2 H_2^2 e^{-2it} =$$

$$= C_1 \tilde{H}_1^1 \cos(2t) + C_2 \tilde{H}_2^2 \sin(2t)$$

устойчивая спираль, неустойчивая спираль