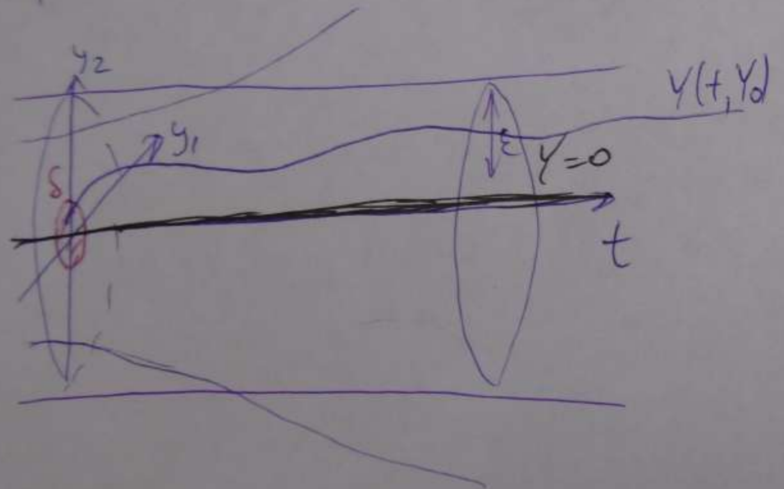
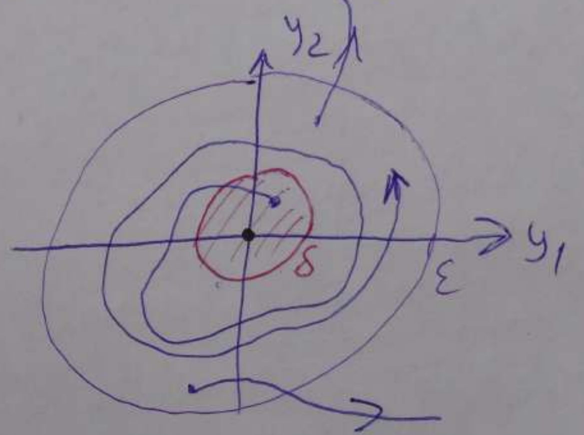
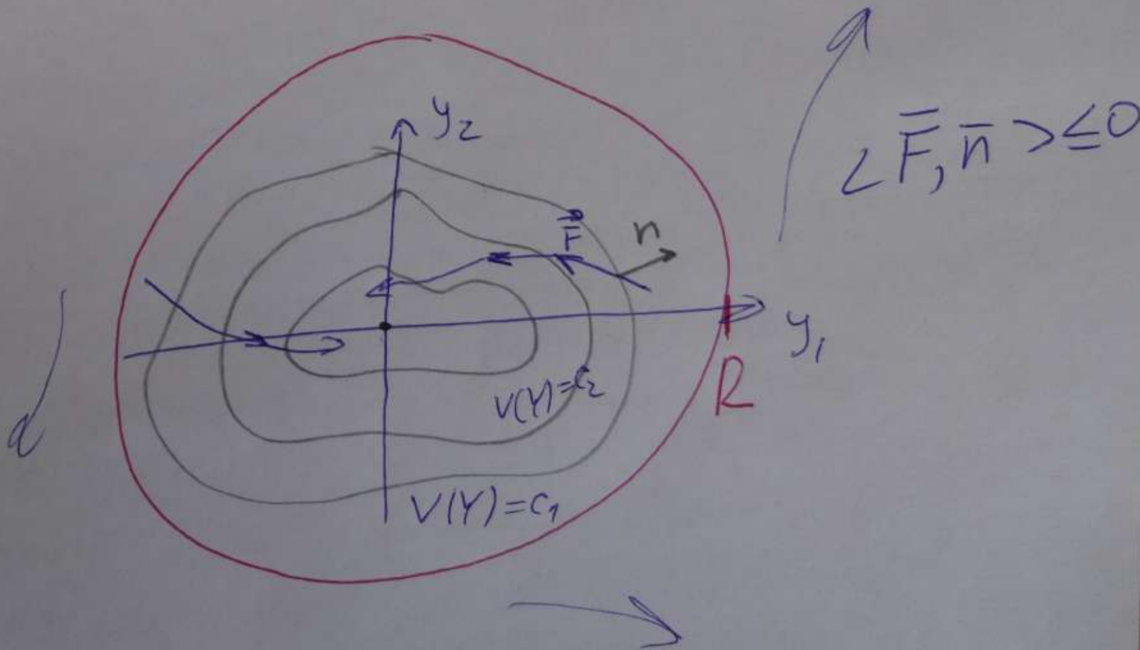
882, 923, 925, 927

$Y' = F(Y)$ $F(0) = 0 \Rightarrow Y \equiv 0$ - реш сист - исса на устойчивость.





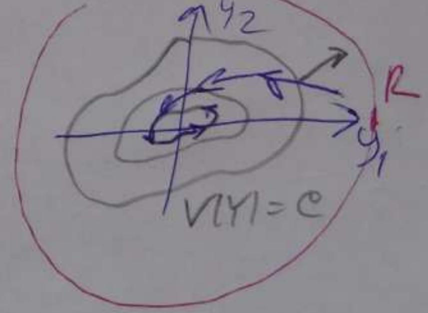


Опр. Ф-ие $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\|<R$, – **ф-ие Ляпунова** системы $Y'=F(Y)$, если: 1) $V(Y)\in C^1(\|Y\|<R)$

2) $V(Y)\geq 0 \quad \|Y\|<R; \quad V(Y)=0 \Leftrightarrow Y=0$

3) $\langle \nabla V, F\rangle \leq 0 \quad \|Y\|<R.$

Th Ляпунова (об устойчивости). Если существует ф-ие Ляпунова для системы $Y'=F(Y)$, то нул. реш $Y\equiv 0$ уст-во по Ляпунову.



Th Ляпунова (об асимптотич. уст-ти)

Если $\exists$ ф-ие $V(Y)$, определённая на $\|Y\|<R$, со св-ми: 1) $V(Y)\in C^1(\|Y\|<R)$

2) $V(Y)\geq 0 \quad \|Y\|<R; \quad V(Y)=0 \Leftrightarrow Y=0$

3) $\langle \nabla V; F\rangle < 0, \quad 0<\|Y\|<R$,

тогда нул. реш сист $Y'=F(Y)$ асимптотич. уст-во.

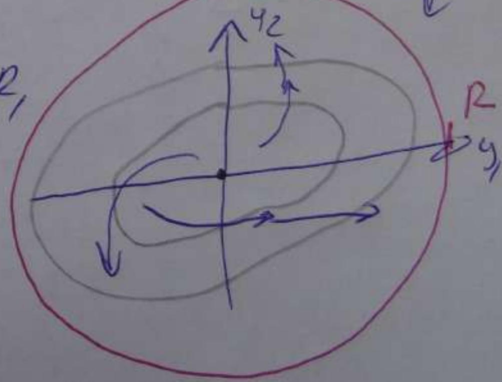
Th Ляпунова (о неустойчивости)

Если $\exists$ ф-ие $V(Y)$, определённая на шаре $\|Y\|<R$, со св-ми: 1) $V(Y)\in C^1(\|Y\|<R)$

2) $V(Y)\geq 0 \quad \|Y\|<R; \quad V(Y)=0 \Leftrightarrow Y=0$

3) $\langle \nabla V, F\rangle > 0 \quad 0<\|Y\|<R$,

тогда нул. реш сист $Y'=F(Y)$ неустойчиво.



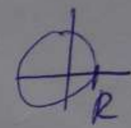
882 $\begin{cases}\dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y\end{cases}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ – иссл-ма уст-ть.

$V(x,y) = x^2+y^2$;

$ax^{2k} + by^{2m}$, $a, b > 0$

$1-\cos x + y^2$, $x^2+y^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

C^1; $V>0$; $V(0)=0$.

$\langle \nabla V, F \rangle \sim 0$ 

$V(x,y) = x^2+y^2$

$\nabla V = \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix}-x\\-2y\end{pmatrix}$

$\langle \nabla V, F \rangle = -2x^2 - 4y^2 \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$V(x,y) = x^2+y^2$ – ф-ия Ляпунова; $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ уст-во

$\langle \nabla V, F \rangle < 0 \quad (x,y) \neq 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ – асимпт. уст.

923 $\begin{cases}\dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = x + y^3\end{cases}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $V(x,y) = x^2+y^2$

$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}x^3-y\\x+y^3\end{pmatrix} \right\rangle = 2x^4 - 2xy + 2yx + 2y^4 = 2x^4 + 2y^4 > 0$ $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ – неустойчиво

925 $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – исс-ма уст. $V(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2y^3 - x^5 \\ -x - y^3 + y^5 \end{pmatrix} \right\rangle = 4xy^3 - 2x^6 - 2xy - 2y^4 + 2y^6$$

$V(x,y) = ax^{2k} + by^{2m}$; $a, b > 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2ak\,x^{2k-1} \\ 2bm\,y^{2m-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2y^3 - x^5 \\ -x - y^3 + y^5 \end{pmatrix} \right\rangle = 4ak\,x^{2k-1}y^3 - 2ak\,x^{2k+4} - 2bm\,xy^{2m-1} - 2bm\,y^{2m+2} + 2bm\,y^{2m+4}$$

$2k - 1 = 1$ $\quad k = 1$

$3 = 2m - 1$ $\quad m = 2$ $\quad V(x,y) = x^2 + y^4$

$4ak = 2bm$ $\quad a = b$

$$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2y^3 - x^5 \\ -x - y^3 + y^5 \end{pmatrix} \right\rangle = 4xy^3 - 2x^6 - 4xy^3 - 4y^6 + 4y^8 =$$

$$= -2x^6 - 4y^6 + 4y^8 =$$

$$= -2x^6 - 4y^6(1 - y^2) \le 0$$

$x^2 + y^2 < 1$

$V(x,y) = x^2 + y^4$; C^1 $(x^2 + y^2 < 1)$

$V > 0$ $\quad 0 < x^2 + y^2 < 1$; $V(0) = 0$

$\langle \nabla V, F \rangle \le 0$ $\quad x^2 + y^2 < 1$

$\Big\}$ V – ф-ия Ляпунова $\Rightarrow$ нул. реш. уст.

$\langle \nabla V, F \rangle < 0$ $\quad 0 < x^2 + y^2 < 1$ $\Rightarrow$ нул. реш. ас. уст.

927 $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3 \\ \dot{y} = 6x - 2y \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - исслед. уст

$V(x,y) = ax^{2k} + by^{2m} = x^{2k} + by^{2m}$

$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2k x^{2k-1} \\ 2mb y^{2m-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y - 3x - x^3 \\ 6x - 2y \end{pmatrix} \right\rangle = 2k x^{2k-1} y - 6k x^{2k} - 2k x^{2k+2} + 2mb x y^{2m-1} - 4mb y^{2m}$

$2k - 1 = 1 \quad k = 1$
$2m - 1 = 1 \quad m = 1$
$V(x,y) = x^2 + by^2$

$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2by \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y - 3x - x^3 \\ 6x - 2y \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= 2xy - 6x^2 - 2x^4 + 12bxy - 4by^2 = -6x^2 + xy(2 + 12b) - 4by^2 - 2x^4 =$

$\left(\frac{2+12b}{\sqrt{6} \cdot 2}\right)^2 = 4b$

$(1 + 6b)^2 = 6 \cdot 4b$

$(1 - 6b)^2 = 0$

$b = 1/6$

$= -6x^2 + xy \cdot 4 - \frac{2}{3} y^2 - 2x^4 =$

$= -6\left(x^2 - \frac{2}{3} xy + \frac{1}{9} y^2\right) - 2x^4 =$

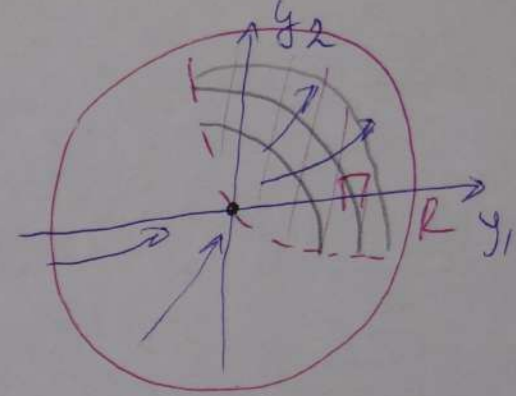
$= -6\left(x - \frac{1}{3} y\right)^2 - 2x^4 \leq 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$V(x,y) = x^2 + y^2/6$ - ф-ия Ляпунова $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - уст-во

$\langle \nabla V, F \rangle < 0$ при $(x,y) \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ас. уст-во.

Тм Четаева

Пусть $\exists\ V(Y)$, $\|Y\|<R$, $\exists$ область $\Pi \subset \{\|Y\|<R\}$



удовлетворяет условиям:

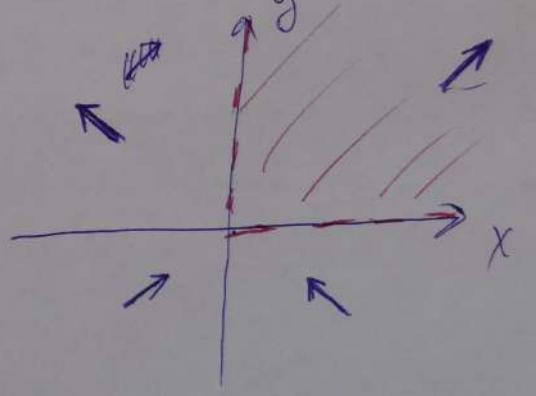
$0 \in \partial\Pi$,

1) $V \in C^1(\Pi)$

2) $V \geq 0 \quad Y \in \Pi; \quad V(Y) = 0 \Leftarrow\Rightarrow Y \in \partial\Pi \cap \{\|Y\|<R\}$

3) $\langle \nabla V, F \rangle > 0 \quad Y \in \Pi,$

тогда нул реш сист $Y' = F(Y)$ неустойчиво.



Пример. $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - иссл. на уст-ть.

$\Pi = \{x>0, y>0\}$

$V(x,y) = xy$

$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix} \right\rangle = xy^2 + x^3 > 0 \quad (x,y) \in \Pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ неуст.

Д/З $\underset{\text{Т.Л}}{824}$, $\underset{\text{Т.Л}}{928}$, $\underset{\text{Т.Ч}}{926}$, $\underset{\text{Т.Л.}}{931}$