

уст-во по первому приближению

$$Y' = AY \quad A - \text{матр}$$

$$Y(t) = C_1 H_0 e^{\lambda t} + C_2 (H_0 t + H_1) e^{\lambda t} + \dots$$

Реш уст-во: 1) $\forall \operatorname{Re} \lambda < 0$;
2) $\exists \operatorname{Re} \lambda = 0$: нет упр. в-ва

Реш неуст: 1) $\exists \operatorname{Re} \lambda > 0$;
 $\forall \operatorname{Re} \lambda \leq 0$ 2) $\exists \operatorname{Re} \lambda = 0$: есть упр. в-ва

$$\exists \lambda: \operatorname{Re} \lambda = 0$$

$$Y' = BY$$

$$Y = C_1 H_0 e^{i\omega t} + \dots$$

$$Y' = F(Y), \quad F(Y^*) = 0 \Rightarrow Y(t) = Y^* - \text{стационарное равновесие}$$

$$Y' = F(Y^*) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Y}}_B (Y - Y^*) + O(\|Y - Y^*\|)$$

Теорема Ляпунова об уст-ти по 1 приближению

I) $\forall \operatorname{Re} \lambda(B) < 0 \Rightarrow Y = Y^* - \text{ас. уст. реш } Y' = F(Y)$

II) $\exists \lambda(B) \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow Y = Y^* - \text{неуст. реш } Y' = F(Y)$

$\parallel \exists \operatorname{Re} \lambda = 0 \Rightarrow \text{т.ч. нулево не уст.}$

$$Y' = F(Y) - \text{автоном. сист. } F(0) = 0 \Rightarrow Y(t) \equiv 0 - \text{реш сист. - иссл. ма уст; } F \in C^1$$

$$Y' = \underbrace{F(0)}_0 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Y}}_{B} Y + O(\|Y\|)$$

$$Y' = BY + O(\|Y\|) \quad Y' = BY - \text{линеаризованная сист}$$

Теорема Ляпунова об уст-ти по 1 приближению

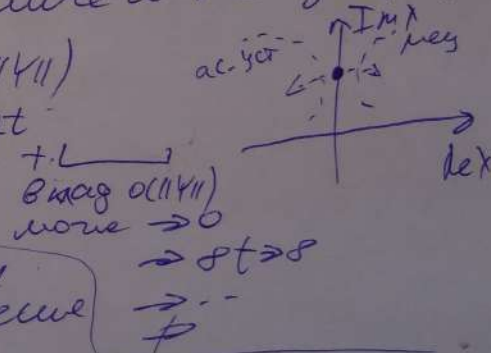
I) $\forall \lambda(B) \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow Y \equiv 0 - \text{ас. уст. реш } Y' = F(Y)$

II) $\exists \lambda(B) \operatorname{Re} \lambda > 0 \Rightarrow Y \equiv 0 - \text{неуст. реш}$

$\parallel \forall \operatorname{Re} \lambda \leq 0; \exists \lambda: \operatorname{Re} \lambda = 0 - \text{т.ч. нулево не уст.}$

$$Y' = BY + O(\|Y\|)$$

$$Y = C_1 H_0 e^{i\omega t}$$



$+L$
вклад $O(\|Y\|)$
нулево $\rightarrow 0$

$\rightarrow \sigma t \gg \sigma$

$\rightarrow \dots$

899, 901, 908, 913, 915, 928

899. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - периодическая y ось. $\begin{cases} \dot{x} = \boxed{-x + y} + \boxed{2xy} \\ \dot{y} = \boxed{2x - 3y} + \boxed{5x^4 + y^3} \end{cases}$ $0(\sqrt{x^2 + y^2})$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 + \lambda_2 = -4$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ $\lambda_i < 0$ $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} < 0$ $\forall \lambda \operatorname{Re} \lambda < 0 \Rightarrow (0,0) - \text{ас.уст.}$

901. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$

$e^{x+2y} - \cos 3x = 1 + x + 2y + \frac{(x+2y)^2}{2} - (1 - \frac{(3x)^2}{2}) + o(\sqrt{x^2+y^2})$
 $2\sqrt{1+2x} - 2e^y = 2(\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{(2x)^2}{2}) - 2(1 + y + \frac{y^2}{2}) + o(\sqrt{x^2+y^2})$

$\begin{pmatrix} x+2y + o(\sqrt{x^2+y^2}) \\ 2x - 2y + o(\sqrt{x^2+y^2}) \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(e^{x+2y} + 3 \sin 3x; \frac{1}{2}(4+8x)^{-1/2} \cdot 8; -2e^y \right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = B$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -6$

$\exists \operatorname{Re} \lambda > 0$

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 2$

$(0,0) - \text{неуст.}$

12

908

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2 \\ \dot{y} = x + ay + y^2 \end{cases}$$

 $a = ? \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ac. ycr?}$

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2a < 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$a > -1: \quad a \in (-1, 0) \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \exists \operatorname{Re} \lambda > 0$$

н.р. неуст

$$a > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \exists \operatorname{Re} \lambda > 0 \text{ н.р. неуст.}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

 $\Downarrow$

$$a < -1 \Rightarrow \forall \lambda \operatorname{Re} \lambda < 0$$

$$a = -1: \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + y + x^2 \\ \dot{y} = x - y + y^2 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\operatorname{Re} \lambda = 0$$

Т.к. не устойчив



$$\Pi = \{x > 0; y > 0\}$$

$$V(x, y) = xy \quad \angle \nabla V, F > = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x + y + x^2 \\ x - y + y^2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -xy + y^2 + yx^2 + x^2 - xy + xy^2 = (x+y)^2 + yx^2 + xy^2 > 0$$

по Т.к. всегда $(0, 0)$ - неуст.

$$a = -1 \quad (0, 0) - \text{неуст}$$

Ответ. $a < -1$.

$$913. \begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix} \text{ - ас. м. } \quad -2t \equiv t^2 - 2t^2 - 2t + t^2$$

Заменим: $u(t) = x(t) + t^2$
 $v(t) = y(t) - t$

$$(z(t) = y(t) - \varphi(t)) \quad x = u - t^2$$

$$y = v + t$$

$$\begin{cases} u' - 2t = (v+t)^2 - 2t(v+t) - 2(v+t) - (u-t^2) \\ v' + 1 = 2(u-t^2) + 2t^2 + e^{-2v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = v^2 - 2v - u \\ v' = 2u - 1 + e^{-2v} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Y} \right|_{(u,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 + 2v & -1 \\ 2 & -2e^{-2v} \end{pmatrix} \bigg|_{(u,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - ас. } y \text{ с } \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix} \text{ ас. } y \text{ с}$$

$$915. \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases} \quad \text{нон. равн-?} \\ \text{уст-?}$$

$$\begin{cases} y - x^2 - x = 0 \\ 3x - x^2 - y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -2x^2 + 2x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$(0,0); (1,2)$ - возможные равновесия

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \begin{pmatrix} -2x-1 & 1 \\ 3-2x & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Y} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \exists \lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0 \\ \text{уст- неуст} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2; \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial Y} \right|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\forall \lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ (1,2) \text{ - ас. } y \text{ с.}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -4$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \Rightarrow \lambda_2 = -3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 H_0^2 e^{-3t} + C_2 H_0^2 \text{ мул. нем. } y \rightarrow -\infty.$$

928 $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3 \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - несл. мул. } y \rightarrow -\infty.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0$$

$$V(x, y) \in C^1(\|y\| < R); V \geq 0 \text{ } \|y\| < R; V(y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\langle \nabla V, F \rangle \approx 0 \text{ } \|y\| < R$$

$$V = \frac{y^2 + x^2}{2} + ay^4 \quad V(x, y) = f(x+y) + g(y)$$

$$\nabla V = \begin{pmatrix} f' \\ f' + g' \end{pmatrix} \quad \langle \nabla V, F \rangle = \begin{pmatrix} f' \\ f' + g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y - x - y^3 \\ x - 2y \end{pmatrix} =$$

$$= 2yf' - xf' - y^3f' + xf' - 2yf' + xg' - 2yg' =$$

$$= -y^3f'(x+y) + xg'(y) - 2yg'(y) = -y^3f'(x+y) + (x+y)g'(y) - 3yg'(y)$$

$$f'(x+y) = \frac{x+y}{y^3} \Rightarrow f(s) = s$$

$$g'(y) = y^3 \Rightarrow g(y) = \frac{y^4}{4} + C_2$$

$$V(x, y) = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C$$

$$V(x, y) = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{y^4}{4}$$

$$\langle \nabla V, F \rangle = -3y \cdot y^3 = -3y^4 \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

мул. нем. $y \rightarrow -\infty$,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 H_0^1 + C_2 H_0^2 \quad \text{муп. леш уст-во}$$

мет.
прис.

826 $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3 \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - неск. ма уст $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = 0$:
 ун од уст координати не работат.



$$V(x,y) = xy$$

$$\langle \nabla V, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy - x^3 + y^3 \\ x^2 - y^3 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{xy^2} - \underbrace{yx^3} + \underbrace{y^4} + \underbrace{xy^3} =$$

$$= xy^2(1-y) + x^3(1-y) + y^4$$

$x^2 + y^2 < 1$

по Тн Четаева: $(0,0)$ - неуст.

D/3 902, 905, 907, 916