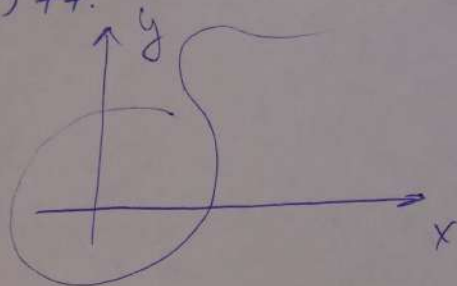


965, 962, 973, 991, 789, 978, 977.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$$



I) реш $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

II) $y(x) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\dot{Y} = AY$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{"седло"}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0; \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0 \quad \text{"узел"}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0;$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 \neq 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta;$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \begin{matrix} \text{нрhc} \\ \text{нрhc} \end{matrix}$$

$$965 \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} H_c = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} +4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} H_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$1) C_1 = C_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) C_1 = 0, C_2 \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$3) C_1 \neq 0, C_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$4) C_1 = 1, C_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$t \rightarrow +\infty \quad e^{2t} \rightarrow \infty \quad e^{-t} \rightarrow 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

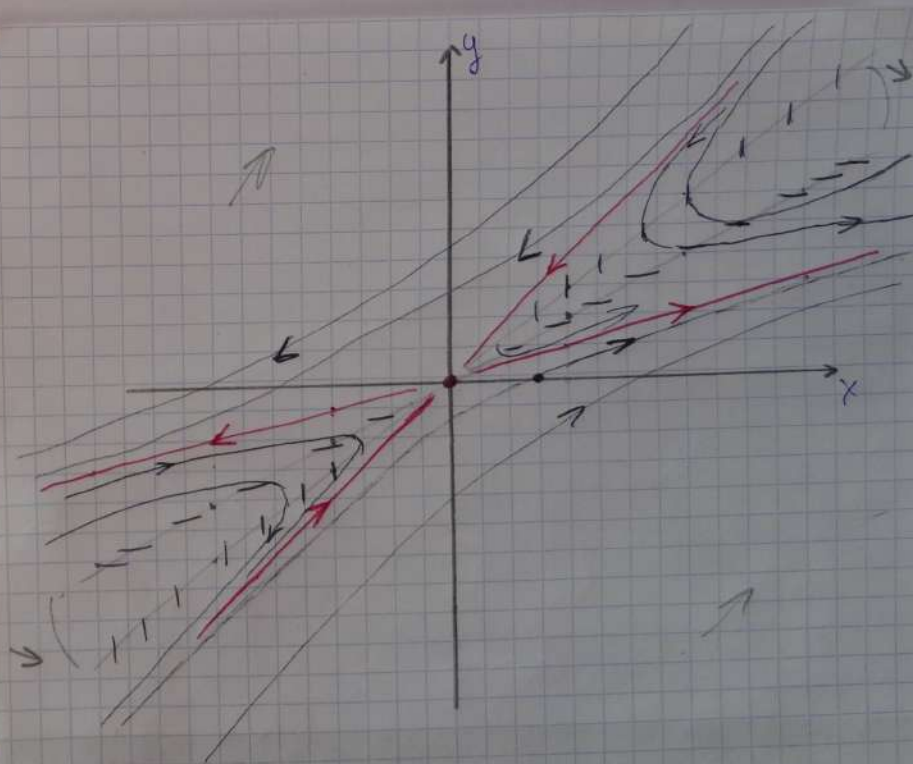
$$t \rightarrow -\infty \quad e^{2t} \rightarrow 0 \quad e^{-t} \rightarrow \infty$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{3x-4y}$$

$$\text{узлов 0: } x-2y=0; \quad y = \frac{x}{2}$$

$$\text{узлов } \infty: \quad 3x-4y=0 \quad y = \frac{3}{4}x$$



Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то
положение равновесия — «седло»
(всегда неустойчиво)

962. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -7 \Rightarrow \lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = -2$
 $\lambda_1 \lambda_2 = 10$

$\lambda_1 = -5 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad H_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$

1) $C_1 = C_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $C_1 = 0, C_2 \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$

3) $C_2 = 0; C_1 \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}$

4) $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$

$t \rightarrow +\infty \quad e^{-2t} \gg e^{-5t}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ направл. } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

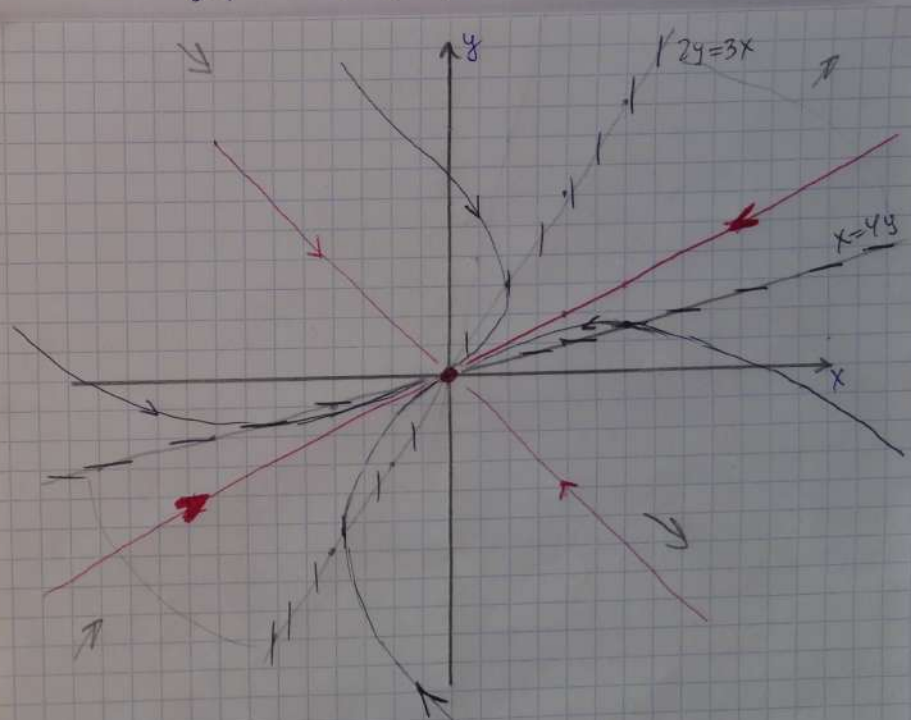
$t \rightarrow -\infty \quad e^{-5t} \gg e^{-2t}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ направл. } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3)

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4y}{2y-3x}$

$x-4y=0$ — узловая
 $2y-3x=0$ — узловая



Положение равновесия — «узел»

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



$$\#93 \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 = 1 \quad \lambda_1 = 1 = \lambda_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} H_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad H_{up} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

$$1) C_2 = C_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) C_2 = 0; C_1 \neq 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$3) C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t e^t$$

$$t \rightarrow +\infty \quad t e^t \gg e^t$$

Траект. паралл. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$t \rightarrow -\infty \quad |t e^t| \gg e^t$$

стремящиеся к $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-y}{3x-y}$$

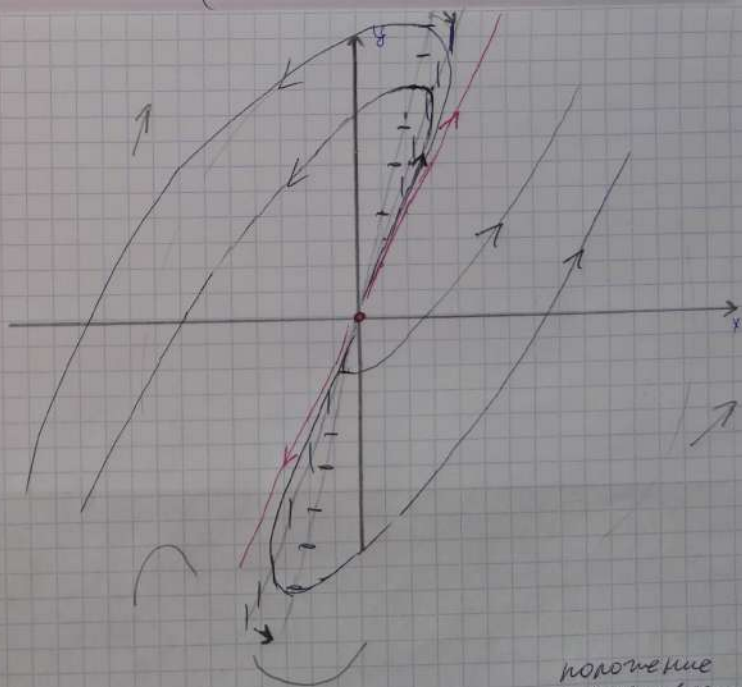
$$\text{узловая } 0: 4x - y = 0$$

$$\text{узловая } 0: 3x - y = 0$$

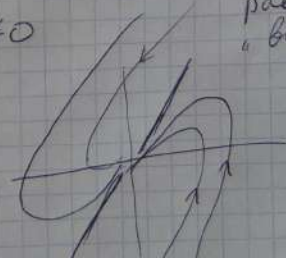
линии перегиба:

$$\ddot{y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{(4-y)' / (3x-y) - (4x-y)' / (3-y)'}{(3x-y)^2}$$

$$= \frac{(2x-y)^2}{(3x-y)^3}$$



Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$



потенцие
равновесие
"вырожденное
узел"

791

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda = 2i \quad \begin{pmatrix} -1-2i & -5 \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix} \quad H_c = \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2it} + C_2 \begin{pmatrix} 1+2i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2it} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} \cos 2t + 2i \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} \sin 2t - 2i \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

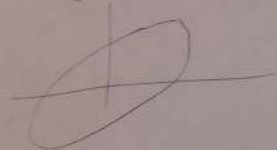
$$t=0; \quad t=\pi; \quad t=\kappa\pi$$

перу - непрерыв.



$$\begin{cases} x = C_1 (\cos 2t + 2i \sin 2t) + C_2 (\cos 2t - 2i \sin 2t) \\ y = -C_1 \cos 2t - C_2 \cos 2t \end{cases}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2$$



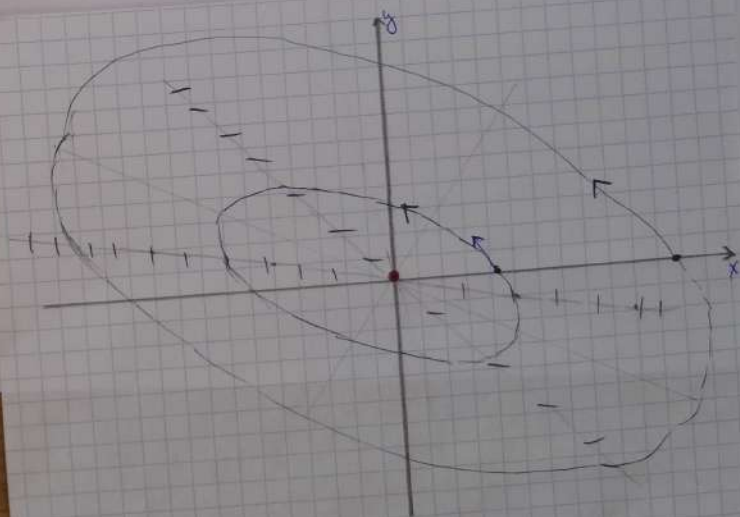
$$0 = -x - 5y - \text{изоклин } \phi$$

$$0 = x + y - \text{изоклин } \psi$$

3)

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \dot{x} = -1 \\ \dot{y} = 1 \end{matrix}$$



$$\text{Если } \lambda_{1,2} = \pm i\beta$$

положение равновесия - центр

уст по Ляпунову
не асимпт уст.



789

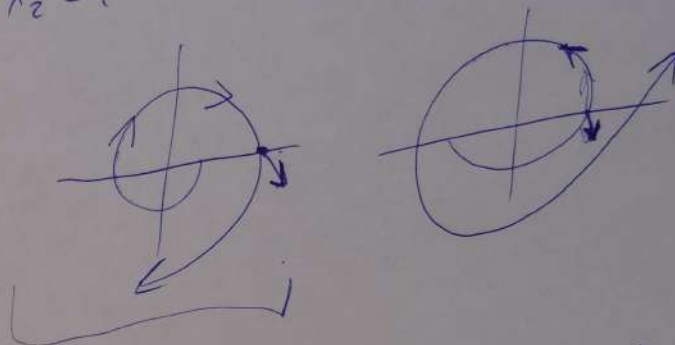
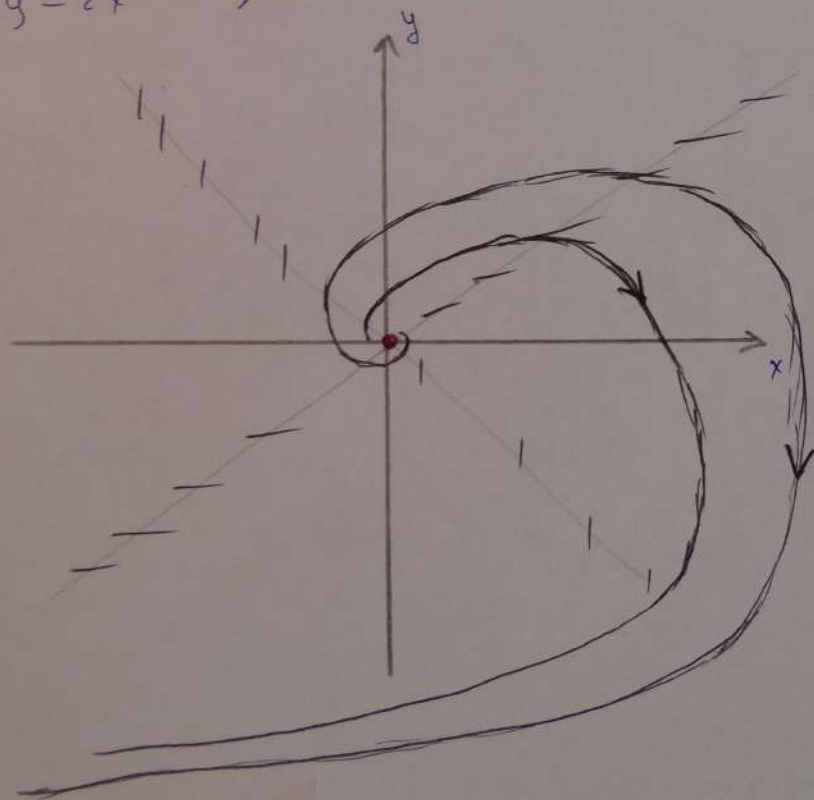
$$\begin{cases} \dot{x} = x+y \\ \dot{y} = 3y-2x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 = 5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} H_0 e^{it} + c_2 e^{2t} \overline{H_0} e^{-it}$$

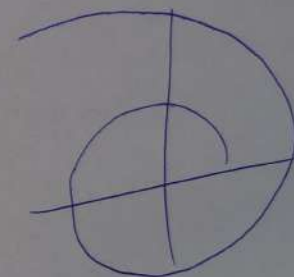
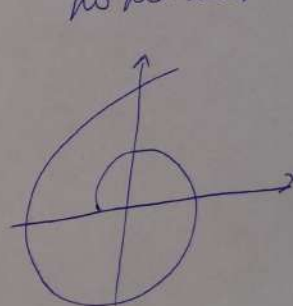
$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow \dot{x}=1 \\ y=0 &\Rightarrow \dot{y}=-2 \end{aligned}$$

$x+y=0$ - изоклина $\varnothing$

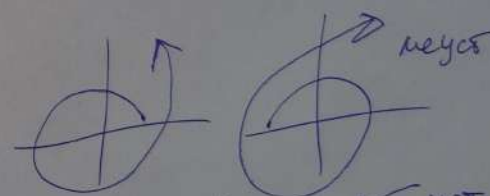
$3y-2x=0$ - изоклина 0



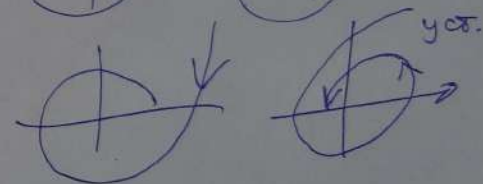
Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
по номеру равновесие - "фокус"



Если $\alpha > 0$



$\alpha < 0$



6)

$$978 \begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$$

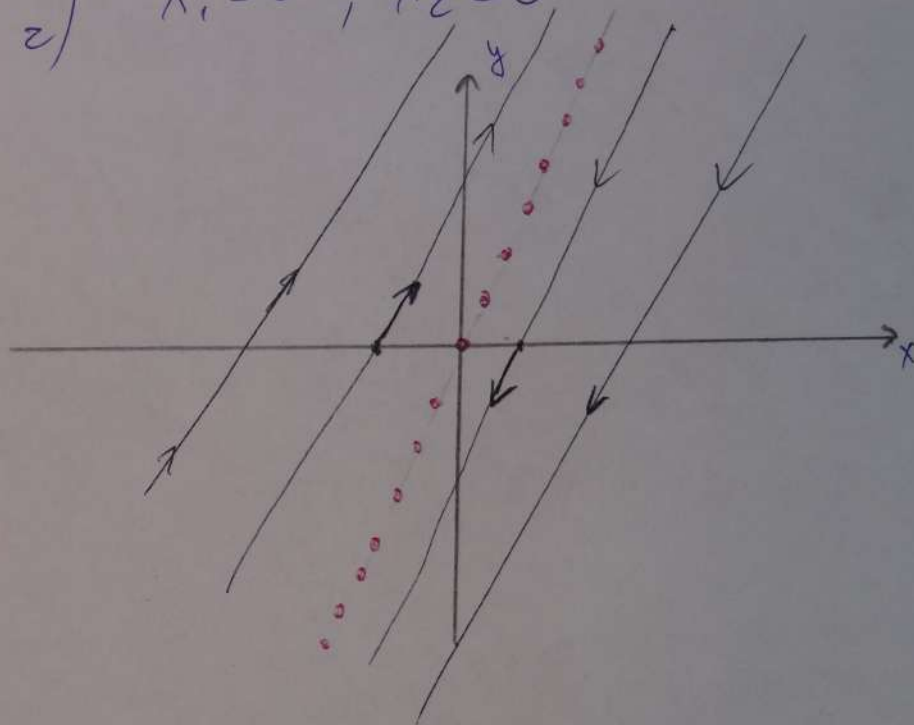
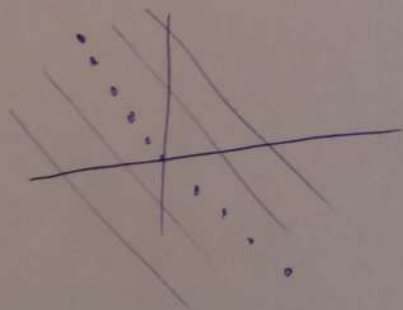
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 H_c + C_2 (t H_c + H_{up})$$

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases} \quad y = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Если $\lambda_{1,2} = 0$, есть инс. вектор



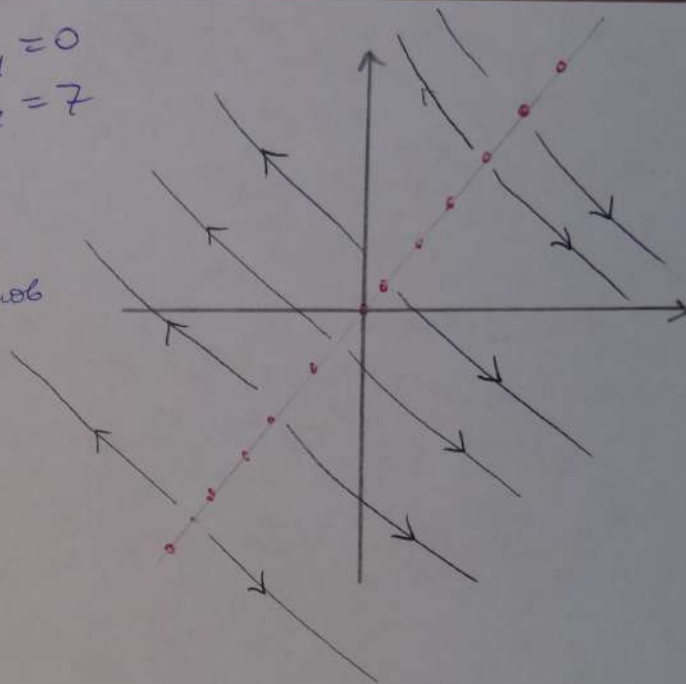
$$\begin{matrix} x=1 & \dot{x}=-2 \\ y=0 & \dot{y}=-4 \end{matrix}$$

977 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4y - 6x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 7 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 H_0^1 + c_2 H_0^2 e^{7t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

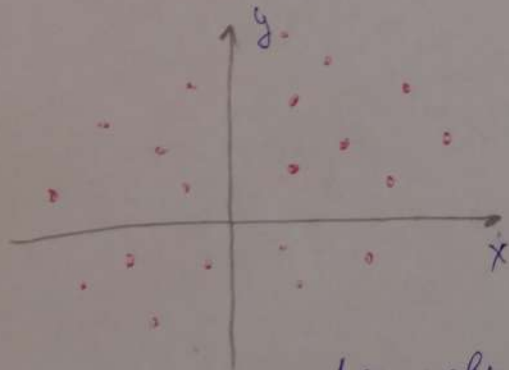
$3x - 2y = 0$ - линия равновесия
 $y = \frac{3}{2}x$



Если $\lambda_1 = 0$
 $\lambda_2 \neq 0$



$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



Все лок. равн. - уст по Лемнову
 не ас. уст.