ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор — Екатерина Юрьевна Балакина

Программа курса лекций
(3-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

1. Уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x, y)$. Определение решения. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением, изоклины.

Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и обобщённо-однородные уравнения. Линейное уравнение. Принцип суперпозиции. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнение в симметричной форме: поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него.

Доказательство теоремы Пикара для уравнения первого порядка. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе».

2. Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Поведение непродолжаемых решений. Теорема Уинтнера. Уравнение $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности.

3. Общая теория линейных систем

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = A(t)X + B(t)$. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Линейность пространства всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = A(t)X$. Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля — Остроградского. Размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

5. Линейные уравнения высокого порядка

Линейное уравнение n-го порядка, сведение к линейной системе. Изоморфизм между пространствами непродолжаемых решений однородного уравнения и соответствующей системы. Теория линейного уравнения n-го порядка как следствие теории линейных систем. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Метод вариации для отысканий частных решений.

6. Краевые задачи

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи.

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля: существование вещественных собственных значений; размерность пространства собственных функций; ортогональность (с весом) собственных функций; односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи. Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром.

7. Понижение порядка дифференциальных уравнений

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.
6. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
7. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
8. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / Под ред. В. К. Романко – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

План семинаров

Уравнения первого порядка

1. Поле направлений, изоклины, задача Коши.	1,5 семинара
2. Уравнения с разделяющимися переменными.	1 семинар
3. Однородное уравнение.	1 семинар
4. Линейное уравнение, уравнение Бернулли, уравнение Риккати.	1,5 семинара
5. Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.	1 семинар

Линейные системы и уравнения высокого порядка

1. Линейные системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента.	1,5 семинара
2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера.	2,5 семинара
3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского-Лиувилля.	1 семинар

Краевые задачи

1. Прямое решение краевых задач, регулярных и сингулярных.	0.5 семинара
2. Построение функции Грина и решение с ее помощью краевых задач.	1 семинар
3. Собственные значения и собственные функции краевых задач.	0.5 семинара

Понижение порядка дифференциальных уравнений

1. Уравнения, допускающие понижение порядка.	3 семинара

Задания
по дифференциальным уравнениям

3-й семестр

В течение семестра студент обязан сдать преподавателю в устной форме все задачи из приведённого ниже списка и выполнить две письменные контрольные работы. Не выполнившие это условие не допускаются к экзамену.

Задание 1 (сдать до 17 октября 2020 г.)

1. Найти все решения уравнения

$$y' = -\frac{y^2}{2x}.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0), если $x_0 \neq 0$ (использовать теорему Пикара)?

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 - 1.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Изобразить прямолинейные интегральные кривые. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0), если $x_0 \neq 0$ (использовать теорему Пикара)?

3. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{-2x + 3y + 1}{2x - y - 3}.$$

4. Для уравнения

$$y' = 4y \sin^2 x - \sin 2x$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; оценить верхнюю границу его модуля;

б) показать, что $y^*(x)$ — π-периодическая функция.

5. Найти все решения уравнения

$$y' + \frac{3y}{x} = 6y + y^{4/3} x e^{-2x} \ln x.$$

6. Найти все решения уравнения

$$\left(y^3 + xy\right) dx + \left(2xy^2 - 1\right) dy = 0.$$

7. Дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = \cos y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

а) Используя теорему Пикара, найти интервал, на котором определено решение задачи Коши.

б) С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Изобразить прямолинейные интегральные кривые. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0) (использовать теорему Пикара)?

в) Найти решение.

г) Найти интервал, на котором определено непродолжаемое решение задачи Коши. Является ли непродолжаемое решение ограниченным?

Задание 2 (сдать до 5 декабря 2020 г.)

8. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z, \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = -6x - 2y - z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

9. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y - 5z, \\ \dot{y} = -x + y - z, \\ \dot{z} = 3x - 2y + 4z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

10. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + 3y - 4z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 3z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

11. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = -2x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = -3x + 2y + z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

12. Найти все вещественнозначные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

13. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + \dfrac{e^t}{t}, \\ \\ \dot{y} = 9x - 2y + \dfrac{e^t}{t}. \end{cases}$$

14. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{1}{1 + e^{4x}}.$$

15. Найти общее решение уравнения

$$y''' + y = e^{-x} + \cos x.$$

16. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 2y'' + y = e^{-x} + e^x \sin x.$$

17. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' + 2y'' - 3y' + y = e^{-x} + x^2.$$

18. Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' + xy' + y = \operatorname{ctg}(\ln x).$$

19. Найти общее решение уравнения

$$x^2 \ln x \; y'' - (\ln x + 1)xy' + (\ln x + 1)y = 2x.$$

Задание 3 (сдать до 30 декабря 2020 г.)

20. При каких $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in C([0, \pi])$ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) + ay'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение, б) не имеет решений, в) имеет бесконечно много решений?

21. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = f(x), \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Построить функцию Грина.

22. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \\ y(1) = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$$

23. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y(2y'' + 1) = 2(y')^2 + 4, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = -1. \end{cases}$$

24. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 3xyy'' - 6yy' + 4x^2(y')^2 = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

25. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^3y'' + xy + 2y^2 = x^2y' + 2xyy', \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Правила аттестации студентов по дифференциальным уравнениям

Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студент обязан сдать своему семинаристу в устной форме все 25 задачи из приведённых выше заданий, а также задачи из п.2. Сданные задачи отмечаются в таблице.

(2) Во время семестра проводится две контрольные. Те задачи, которые решены на минус/плюс либо меньше, сдаются в устной форме своему семинаристу. Сданные задачи отмечаются в таблице.

(3) Если студент пропустил много занятий, то семинарист имеет право задать ему индивидуальные дополнительные задачи из числа тех, которые решались на пропущенных занятиях.

(4) Приём задач из п.1 и п.2 прекращается 30-го декабря 2020 года.

(5) Студент, не сдавший все задачи из п.1 и п.2, сдаёт их во время экзамена, см. п. 17.

Проведение экзамена

(6) Студент, сдавший все задачи из п.1 и п.2, получает возможность отвечать на билет на экзамене.

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.

(8) Экзаменационный билет содержит теоретический вопрос из программы курса и задачу. Список вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт http://www.phys.nsu.ru/balakina в первые дни экзаменационной сессии.

(9) На подготовку к ответу даётся один час.

(10) При подготовке к ответу можно пользоваться только собственной головой.

(11) При подготовке к ответу запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(12) Выходить из аудитории до начала ответа на билет нельзя.

(13) Для получения оценки «удовлетворительно», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Для получения оценки «хорошо», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить доказательства теорем, возможно с некоторыми недочётами. Для получения оценки «отлично», необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить полное со всеми выкладками доказательство теорем.

(14) По усмотрению экзаменатора могут быть заданы дополнительные вопросы и задачи.

(15) Также имеется список вопросов (выкладывается на сайт http://www.phys.nsu.ru/balakina в первые дни экзаменационной сессии), знать ответы на которые необходимо для получения положительной оценки. Это ключевые вопросы курса, не знание ответа на которые сразу предполагает «неудовлетворительно», вне зависимости от того, насколько хорошо даны ответы на вопросы из билета.

(16) Студенты, получившие за обе контрольные пятёрки, имеют право на «плюс балл» на экзамене (исключением является повышение на пересдачах и с «неудовлетворительно»).

(17) Студент, не сдавший все задачи из п. 1 и п. 2, приходит на экзамен к 9.00, ему выдаётся список несданных задач. Студент один час письменно решает эти задачи без тетрадей и записей. Затем сдаёт написанное, сразу всё проверяется, правильно решённые задачи отмечаются в таблице, и если все задачи сданы, то берётся билет и далее как описано в пп. 6-15. Если студент за этот час не смог сдать все требуемые задачи, то он их досдаёт по этим же правилам на пересдаче.

Проведение пересдачи

(18) Пересдача проводится по тем же правилам, что и основной экзамен.

Особые ситуации

(19) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе, так и отдельному студенту.

(20) Конфликтные и спорные ситуации, возникающие между студентом и семинаристом, урегулирует лектор. Это касается и работы в семестре, и сдачи задач, и сдачи экзамена.

Программу составила к.ф.-м.н. Е. Ю. Балакина