ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор — Мария Александровна Скворцова

Программа курса лекций
(3-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экзамен)

1. Уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Определение решения, определение непродолжаемого решения. Задача Коши. Теорема Пикара существования и единственности решения. Теорема Пеано существования решения. Картина решений дифференциального уравнения. Поле направлений, изоклины.

Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения вида $y' = \varphi(\alpha t + \beta y + \gamma)$. Уравнения с однородной правой частью $y' = \varphi(\frac{y}{t})$. Уравнения вида $y' = \varphi\left(\frac{\alpha_1 t+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 t+\beta_2 y+\gamma_2}\right)$. Линейные уравнения, метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Доказательство теоремы Пикара для уравнения первого порядка.

2. Линейные системы и уравнения высокого порядка

Линейные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Матричная экспонента. Пространство решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица решений. Формула Остроградского – Лиувилля. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольной постоянной.

Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем. Задача Коши. Фундаментальная матрица решений. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

3. Краевые задачи для линейных систем и уравнений

Краевые задачи на отрезке для линейных систем дифференциальных уравнений. Условие однозначной разрешимости. Матрица Грина. Краевые задачи на отрезке для линейных дифференциальных уравнений высокого порядка. Функция Грина. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции.

4. Нелинейные системы и уравнения высокого порядка

Нелинейные системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема Пеано. Теорема Пикара. Непродолжаемые решения. Теорема о покидании компакта для непродолжаемых решений. Нелинейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Задача Коши. Теоремы существования и единственности решения.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений. Методы понижения порядка.

Литература

1. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. СПб: Издательство С.-Петербургского университета, 2005.

2. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1: Краевые задачи. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.

3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 6-е изд., стереотип. М.: URSS, 2001.

4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 7-е изд., исправ. М.: Изд-во МГУ, 1984.

5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1984.

6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 7-е изд., стереотип. М.: URSS, 2015.

План семинаров

Уравнения первого порядка

1. Картина решений дифференциального уравнения.	1 семинар
2. Уравнения с разделяющимися переменными.	1 семинар
3. Уравнения с однородной правой частью.	1 семинар
4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати.	1 семинар
5. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.	1 семинар

Линейные системы и уравнения высокого порядка

1. Линейная зависимость/независимость функций.	0,5 семинара
2. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента.	2 семинара
3. Линейные неоднородные системы.	0,5 семинара
4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	2 семинара
5. Линейные уравнения Эйлера.	1 семинар
6. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.	1 семинар

Краевые задачи

1. Прямое решение краевых задач.	0,5 семинара
2. Решение краевых задач с помощью функции Грина.	1 семинар
3. Собственные значения и собственные функции краевых задач.	0,5 семинара

Нелинейные дифференциальные уравнения

1. Постановка задачи Коши. Существование и единственность решения.	0,5 семинара
2. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений	1,5 семинара

Задания
по дифференциальным
уравнениям

3-й семестр

В течение семестра студент обязан сдать преподавателю в устной форме все задачи из приведённого ниже списка и выполнить две письменные контрольные работы. Не выполнившие это условие не допускаются к экзамену.

Задание 1 (сдать до 16 октября 2021 г.)

1. Найти все решения уравнения (выразить функцию $y(t)$ в явном виде):

$$y' = \cos y.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (t_0, y_0) (использовать теорему Пикара)?

2. Найти все решения уравнения (выразить функцию $y(t)$ в явном виде):

$$y' = (y - t - 1)^3 + 1.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (t_0, y_0) (использовать теорему Пикара)?

3. Найти все решения уравнения (выразить функцию $y(t)$ в явном виде):

$$y' = \frac{t + 2y}{t}.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (t_0, y_0), если $t_0 \neq 0$ (использовать теорему Пикара)?

4. Решить задачу Коши (выразить функцию $y(t)$ в явном виде):

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y - 3t + 5}{y - 2t + 3}, \\[2ex] y(2) = -2. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

5. Найти все решения уравнения (выразить функцию $y(t)$ в явном виде):

$$y' + y + \frac{t^2}{y^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{y}{t} + \frac{te^{-3t}}{y^2}\right).$$

6. Для уравнения

$$y' = 2y\cos^2 t + \cos 2t$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(t)$, $-\infty < t < +\infty$, ограниченное на $\mathbb{R}$, и такое решение только одно; дать его формулу; оценить верхнюю границу его модуля;

б) показать, что $y^*(t)$ — π-периодическая функция.

7. Найти все решения уравнения

$$\left(2ty + y^4 \ln t\right) dt + \left(y^5 \sin y - 3t^2\right) dy = 0.$$

8. Дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = \cos y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

а) Используя доказательство теоремы Пикара, указать отрезок (отрезок Пикара), на котором гарантированно определено решение задачи Коши.

б) В плоскости (t, y) построить график непродолжаемого решения задачи Коши (см. задачу № 1).

в) Выписать формулу решения задачи Коши. Указать интервал существования непродолжаемого решения. Является ли непродолжаемое решение ограниченным?

г) Ответить на вопросы из п. а), б), в) для следующих задач Коши (см. задачи № 2 и № 3):

$$\begin{cases} y' = (y - t - 1)^3 + 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t + 2y}{t}, \\[2ex] y(1) = 0. \end{cases}$$

Задание 2 (сдать до 4 декабря 2021 г.)

9. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = x + y - z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x - 3y + 3z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

10. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 5z, \\ y' = x - 2y + z, \\ z' = -3x + 2y - 5z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

11. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 2y - 2z, \\ y' = 2x + 3y - 4z, \\ z' = -2x - 4y + 3z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

12. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 4x - y + z, \\ y' = 2x + y + 2z, \\ z' = 3x - 2y + 4z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

13. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 3x + 3y - 2z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

14. Найти все вещественнозначные решения системы

$$\begin{cases} x' = -x + y - z, \\ y' = -x + y - z, \\ z' = 4x. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

15. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \dfrac{e^{2t}}{e^t + 1}, \\[2ex] y' = 2x - y + \dfrac{e^{2t}}{e^t + 1}. \end{cases}$$

16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-t}}{\cos t}.$$

17. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y = t^3 + e^t + \sin t.$$

18. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = te^{-t} + e^t \cos t.$$

19. Найти общее решение уравнения

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = \left(\frac{t}{\ln t}\right)^2.$$

20. Найти общее решение уравнения

$$t(t+1)y'' + (t-1)y' - y = 2t.$$

Задание 3 (сдать до 30 декабря 2021 г.)

21. При каких $T > 0$ и $f(t) \in C([0,T])$ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + y = f(t), \quad 0 < t < T, \\ y(0) = 0, \\ y(T) = 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение, б) не имеет решений, в) имеет бесконечно много решений?

22. Найти решение краевой задачи, построить функцию Грина:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = f(t), \quad 0 < t < 1, \\ y(0) - y'(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

23. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} t^2y'' + 3ty' + y = \lambda y, \quad 1 < t < e, \\ y(1) + y'(1) = 0, \\ y(e) + ey'(e) = 0. \end{cases}$$

24. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} yy'' = 2(y')^2 - 4y^2(y')^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

25. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (yy'' - (y')^2)\sin t + y^2 = (\sin t - \cos t)yy', \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

26. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} t^2y'' + 2t^2yy' + 2ty^2 - 2y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Правила аттестации студентов по дифференциальным уравнениям

Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студент обязан сдать своему семинаристу в устной форме все 26 задач из приведённых выше заданий, а также задачи из п. 2.

(2) Во время семестра проводится две контрольные работы. Те задачи, которые решены на «минус» или «минус/плюс», необходимо сдать в устной форме своему семинаристу.

(3) Если студент пропустил много занятий, семинарист имеет право задать ему индивидуальные дополнительные задачи из числа тех, которые решались на пропущенных занятиях.

(4) Приём задач из п. 1 и п. 2 прекращается 30 декабря 2021 года.

(5) Студент, не сдавший все задачи из п. 1 и п. 2, сдаёт их во время экзамена, см. п. 17.

Проведение экзамена

(6) Студент, сдавший все задачи из п. 1 и п. 2, получает возможность отвечать на билет на экзамене.

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.

(8) Экзаменационный билет содержит теоретический вопрос и задачу.

(9) На подготовку к ответу даётся один час.

(10) При подготовке к ответу можно пользоваться только собственной головой.

(11) При подготовке к ответу запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(12) Выходить из аудитории до начала ответа на билет нельзя.

(13) Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Для получения оценки «хорошо» необходимо решить задачу, сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе, предъявить доказательства теорем, возможно, с некоторыми недочётами. Для получения оценки «отлично» необходимо решить задачу, сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе, предъявить полные со всеми выкладками доказательства теорем.

(14) По усмотрению экзаменатора могут быть заданы дополнительные вопросы и задачи.

(15) Также имеется список вопросов, знать ответы на которые необходимо для получения положительной оценки. Это ключевые вопросы курса, незнание ответа на которые сразу предполагает «неудовлетворительно» вне зависимости от того, насколько хорошо даны ответы на вопросы из билета.

(16) Студенты, получившие за обе контрольные «отлично», имеют право на «плюс балл» на экзамене (исключением является повышение на пересдачах и с «неудовлетворительно»).

(17) Студент, не сдавший все задачи из п. 1 и п. 2, приходит на экзамен к 9.00 для написания несданных задач. С 9.00 до 10.00 студент письменно решает задачи без тетрадей и записей, в 10.00 сдает работу. Работа проверяется в тот же день. Если студент правильно решил все требуемые задачи, он получает возможность отвечать на билет на экзамене (см. пп. 6–15). Если за час (с 9.00 до 10.00) студент не смог (либо не успел) написать правильное решение всех

требуемых задач, то он отправляется на пересдачу, в экзаменационную ведомость ставится оценка «неудовлетворительно». Оставшиеся задачи студент досдаёт по тем же правилам на пересдаче.

Проведение пересдачи

(18) Пересдача проводится по тем же правилам, что и основной экзамен.

Особые ситуации

(19) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе, так и отдельному студенту.

(20) Конфликтные и спорные ситуации, возникающие между студентом и семинаристом, урегулирует лектор. Это касается и работы в семестре, и сдачи задач, и сдачи экзамена.