Программа курса phys.nsu.ru/ok03/programs.html

Список литературы.

[1] Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I.

[2] Романко В.К. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

[3] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

[4] Петровский И.Г. Лекции по теории дифференциальных уравнений.

[5] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[6] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[7] Балакина Е.Ю. Системы линейных дифференциальных уравнений: немного теории и решения задач

Задачники

[1] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.

[2] Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Под ред. Романко В.К.

ГЛАВА I. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§1. Дифференциальные уравнения

Начнём с того, что такое дифференциальное уравнение (д.у.).

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-ого порядка* называется соотношение следующего вида:

$$G(x, y, y') = 0,$$

где x — независимая переменная, $x \in \langle a, b\rangle$, $y(x)$ — неизвестная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$ — первая производная функции y.

Рассматриваем случай, когда $x \in \mathbb{R}$, $y(x)$ — вещественнозначная.

$\Big\{$Обозначаем через $\langle a, b\rangle$ промежуток вещественной прямой $\mathbb{R}$, когда не важно, включены граничные точки в него или нет, т.е. это может означать все варианты: $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.$\Big\}$

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка* называется соотношение следующего вида:

$$G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где x — независимая переменная, $x \in \langle a, b\rangle$, $y(x)$ — неизвестная функция, $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$ — i-ая производная функции y, $i = 1, \ldots, n$.

$\Big\{$В теории дифференциальных уравнений выделяют всего два типа уравнений. Первые — это обыкновенные дифференциальные уравнения. Это те, в которых неизвестная функция y зависит от одной переменной (у нас $x \in \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$) и, соответственно, присутствуют полные производные y', y'', $y''' \ldots$ Вторые — это уравнения с частными производными. Это в случае, когда неизвестная функция y зависит от нескольких переменных x_1, x_2, x_3 и т.д, а в уравнении тогда имеются частные производные по этим переменным. Почти весь наш курс посвящён обыкновенным дифференциальным уравнениям.}

Приведём несколько простейших примеров возникновения дифференциальных уравнений при описании физических процессов.

Процесс распада радиоактивного вещества. Пусть $y(t)$ — количество вещества, нераспавшегося к моменту времени t. Известно, что скорость распада прапорциональна количеству вещества, поэтому получаем закон процесса распада:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y,$$

где γ — коэффициент пропорциональности, $\gamma = const$. Знак минус в правой части стоит, поскольку количество вещества уменьшается.

Получили дифференциальное уравнение 1-ого порядка. Решение его $y(t) = Ce^{-\gamma t}$, где C — произвольная константа.

Уравнение колебания. Рассмотрим движение точки массы m по горизонтальной прямой под действием силы упругости пружины жёсткости k. Отклонение тела в момент времени t от положения равновесия обозначим через $x(t)$, тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки будет следующим:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Обычно это уравнение записывается в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Его решение

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Воспользовавшись тригонометрической формулой синуса суммы, решение можно записать иначе

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right).$$

Амплитуду A и начальную фазу α можно однозначно определить из начальных условий, т.е. от положения и скорости в момент $t = 0$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определяется массой тела и жёсткостью пружины.

{нужен рисунок}

Уравнение математического маятника. Под действием силы тяжести точка массы m, подвешенная на нерастяжимой нити длины l, движется по окружности. Угол отклонения в момент времени t от вертикального положения $\varphi(t)$. Сила тяжести, действующая на тело, распадается на две составляющие. Составляющая, направленная по радиусу, уравновешивается силой натяжения нити, составляющая по касательной равна $-mg\sin\varphi$ (если за положительное направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла φ). По второму закону Ньютона

$$m\ddot{x} = -mg\sin\varphi,$$

где $x(t)$ — длина дуги окружности, т.е. $x(t) = l\varphi(t)$, таким образом получаем

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Это уравнение не имеет решений в виде элементарных функций, но их можно представить в виде суммы бесконечных рядов. Если предположить, что угол φ в процессе движения мал, то можно заменить $\sin\varphi$ на φ, тогда уравнение примет вид уравнения колебания из предыдущего примера:

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

{нужен рисунок}

Итак, перейдём к теории.

В нашем курсе мы в основном будем изучать дифференциальные уравнения, разрешённые относительно производной.

Возьмём функцию $f : D \to \mathbb{R}$, что означает вещественнозначную функцию с областью определения D. Множество D двумерное, т.е. $D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно переменной.

Определение. Функция $y : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *решением* дифференциального уравнения (1), если при подстановке этой функции в (1) получим тождество, т.е. $y'(x) = f(x, y(x))$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$.

Замечание к определению.

а) Сразу будем предполагать, что решение определено на *одном* интервале. Это удобно будет в дальнейшем: во-первых, решения нужны будут непрерывные, во-вторых, когда будем искать решения, удовлетворяющие начальным данным, это условие позволит находить единственное решение.

б) Функция f должна быть определена в точке $(x, y(x))$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$, значит, $(x, y(x))$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$ принадлежит D — области определения функции f. Иначе говоря, график функции $y(x)$ для $x \in \langle a, b\rangle$ принадлежит множеству D.

в) Должна существовать производная $y'(x)$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$, а следовательно, $y \in C(\langle a, b\rangle)$, т.е. функция $y(x)$ непрерывна на $\langle a, b\rangle$.

§2. Непродолжаемые решения. Задача Коши. Теорема Пеано. Теорема Пикара.

Рассмотрим простой пример

$$y' = y.$$

Можно указать два решения: $y(x) = e^x, x \in (-12, 12]$, и $y(x) = e^x, x \in [-5, 3)$. Это две различные функции (поскольку области определений различны, несмотря на то, что они совпадают на общем интервале существования), значит, это два различных решения. Из их представления видно, что первое как бы "продолжает" второе. Можно сформулировать это более строго.

Определение. Пусть функция $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ является решением д.у. (1), функция $\psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ также является решением д.у. (1). Будем говорить, что решение φ *продолжает* ψ, если

а) $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$,

б) $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in \langle c, d\rangle$.

{нужен рисунок}

Таким образом можно определить "самое длинное решение", то, которое нельзя продолжить ни влево, ни вправо.

Определение. Решение $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ д.у. (1) — *непродолжаемое*, если не существует ни одного продолжающего его решения.

В дальнйшем решения сразу будем предполагать непродолжаемыми.

Пример. Рассмотрим д.у.

$$y' = \frac{y}{x^2 - y}.$$

Здесь $f(x, y) = \frac{y}{x^2-y}$, её область определения $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = x^2\}$. Тогда

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, не решение, поскольку при $x = 0$ имеем $y = 0$, а в точке $(0, 0)$ функция f не определена;

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, не решение, поскольку определено не на одном интервале;

$y(x) = 0$, $x \in (3, 9]$, продолжаемое решение;

$y(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$, непродолжаемое решение.

Вернёмся к д.у.

$$y' = y.$$

Существует бесконечное число решений даже среди непродолжаемых. Это, например, $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, и $y(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$, и, вообще, $y(x) = Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, где C — произвольная константа.

{нужен рисунок}

Среди этого бесконечного количества решений можно выбрать особенное, например то, которое проходит через конкретную точку. Задача о нахождении такого решения называется задачей Коши.

Определение. Возьмём точку $(x_0, y_0) \in D$. *Задача Коши* для уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ — это задача об отыскании решения д.у. (1), проходящего через точку (x_0, y_0):

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{ЗК(x_0, y_0)}$$

Пример.

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Общее решение д.у. $y(x) = Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, где C — произвольная константа. Подставим начальное условие $y(0) = 3$ в это общее представление: $3 = Ce^0$. Значит, $C = 3$, а решение задачи Коши единственное: $y(x) = 3e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Но как покажут примеры, у задачи Коши может быть как единственное решение, так и совсем не быть решений, либо их может быть бесконечное количество. Это зависит от самого д.у., а также от того, где выбираем начальную точку. В некоторых случаях из вида д.у., не решая его, можно сделать вывод о прохождении решения через начальную точку. В двух теоремах, приведённых ниже, указываются условия, при выполнении которых сразу следует существование решения, однако следует заметить, что при нарушении этих условий никаких выводов о решении нельзя сделать.

Теорема Пеано.

Пусть

$f \in \mathcal{C}(D)$ (т.е. функция f непрерывна на множестве D),

$D \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое множество,

тогда

для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует непродолжаемое решение ЗК(x_0, y_0), возможно, не одно,

и любое непродолжаемое решение ЗК(x_0, y_0) определено на открытом интервале.

Теорема Пикара.

Пусть

$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$ (т.е. функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на множестве D),

$D \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое множество,

тогда

для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение ЗК(x_0, y_0),

и оно определено на открытом интервале $(\alpha(x_0, y_0), \omega(x_0, y_0))$.

Теоремы утверждают, что если правая часть д.у. (1) непрерывна в некотором непустом открытом множестве D, то через любую точку этого множества обязательно проходит график непродолжаемого решения д.у(1), причём, может проходить несколько графиков решений (теорема Пеано). Если, кроме этого, ещё и частная производная функции f по переменной y непрерывна в D, то через любую точку этого множества проходит единственный график непродолжаемого решения д.у(1) (теорема Пикара).

Пример. В д.у.

$$y' = \frac{y}{x}$$

правая часть имеет вид $f(x, y) = \frac{y}{x}$, которая не определена на прямой $x = 0$. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$ также не определена на прямой $x = 0$. Поэтому для применения теоремы Пикара в качестве множества D можно взять, например, левую или правую полуплоскость. В первом случае имеем $f \in \mathcal{C}(\{x < 0\})$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(\{x < 0\})$, $D = \{x < 0\}$ — непустое открытое множество. Тогда по теореме Пикара через каждую точку полуплоскости $\{x < 0\}$ проходит график единственного непродолжаемого решения. Про прямую $x = 0$ можно сразу сказать, что через неё решения не проходят, поскольку она не входит в область определения правой части f.

Если найти решение в явном виде, то это полупрямые $y(x) = Cx$, определённые на $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$. Отсюда тоже видно, что через каждую точку левой или правой полуплоскости проходит по одной полупрямой.

Пример. В д.у.

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

правая часть имеет вид $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$, которая непрерывна на всём $\mathbb{R}^2$, а частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = sign(y)\frac{1}{\sqrt{|y|}}$ не определена на прямой $y = 0$. Получается, что выполняется теорема Пеано с $D = \mathbb{R}^2$, значит, через каждую точку плоскости точно проходит решение, но про единственность пока не ясно. Теперь обращаемся к теореме Пикара. В верхней и нижней полуплоскости не только f непрерывна, но и её частная производная по переменной y непрерывна, а значит, через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ кроме прямой $y = 0$ проходит единственное решение. Про саму прямую $y = 0$ из теоремы Пикара никаких утверждений сделать нельзя, там может быть что угодно, надо исследовать другими способами.

Возьмём конкретную точку (0,0). Можно заметить, что через неё проходят следующие решения решения:

$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$,

$y(x) = \begin{cases} x^2, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0, \end{cases}$

$y(x) = \begin{cases} x^2, x \geqslant 0, \\ 0, -3 < x < 0, \\ -(x+3), -3 \leqslant x, \end{cases}$

$y(x) = \begin{cases} x^2, x \geqslant 0, \\ -x^2, x < 0, \end{cases}$

таким образом можно построить бесконечное число решений, проходящих через (0,0), да и вообще через любую точку на прямой $y = 0$.

Пример. Рассмотрим д.у.

$$y' = 0,$$

где в качестве множества D возьмём замкнутый круг $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, тогда условия теорем не выполняются. Через точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ множества D не проходит ни одного решения, через любую точку $D\backslash\{(0, 1), (0, -1)\}$ проходит график единственного непродолжаемого решения.

§3. Геометрическая интерпритация дифференциального уравнения. Изоклины.

Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной:

$$y' = f(x, y), f : D \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

Будем предполагать, что выполняются условия теоремы Пикара: $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, D — открытое непустое.

Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$. Через неё обязательно пройдёт график некоторого решения $y(x)$, при этом $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Из курса математического анализа известно, что уравнение касательной к $y(x)$ в точке (x_0, y_0) есть $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. Тангенс угла $\alpha_{(x_0,y_0)}$, образованного касательной и осью OX, равен значению производной в точке x_0: $tg\alpha_{(x_0,y_0)} = y'(x_0)$. Таким образом, в каждой точке (x_0, y_0) множества D можно написать уравнение касательной к графику решения д.у., прохожящего через эту точку, пользуять только дифференциальным уравнением: $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Если теперь в каждой точке D определить касательные к графикам решений, то можно отобразить и сами графики решений.

Определение. Каждой точке $(x, y) \in D$ сопоставим прямую, угол наклона которой $\alpha_{(x,y)}$, т.ч. $tg\alpha_{(x,y)} = f(x, y)$. Это множество прямых назовём *полем направлений д.у.* $y' = f(x, y)$.

Получаем из определения, что касательные к графику решения д.у. (1) совпадают с полем направлений.

Определение. График решения д.у. называют также *интегральной кривой.*

Определение. *Изоклина* k — множество точек, в которых поле направлений имеет одинаковый наклон α, где $tg\alpha = k$, т.е. "изоклина k"$= \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$.

{нужен рисунок}

Пример. Построим картину решений д.у.

$$y' = x + y.$$

"Изоклина 0": на множестве $x + y = 0$ касательные имеют $tg\alpha = 0$, т.е. на прямой $y = -x$ касательные к решению образуют угол $\alpha = 0$ с осью OX.

"Изоклина 1": на множестве $x + y = 1$ касательные имеют $tg\alpha = 1$, т.е. на прямой $y = 1 - x$ касательные к решению образуют угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с осью OX.

"Изоклина -1": на множестве $x + y = -1$ касательные имеют $tg\alpha = -1$, т.е. на прямой $y = -1 - x$ касательные к решению образуют угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ с осью OX.

"Изоклина 2": на множестве $x + y = 2$ касательные имеют $tg\alpha = 2$, т.е. на прямой $y = 2 - x$ касательные к решению образуют угол $\alpha = arctg 2$ с осью OX.

"Изоклина -2": на множестве $x + y = -2$ касательные имеют $tg\alpha = -2$, т.е. на прямой $y = -2 - x$ касательные к решению образуют угол $\alpha = -arctg 2$ с осью OX.

Можно ещё больше изоклин изобразить, но здесь уже примерно понятна ситуация: чем выше прямая, тем наклон круче со знаком "$+$", чем ниже, тем круче со знаком "$-$".

Далее вспомним математический анализ и поймём, где области возрастания и убывания решений и области выпуклости вверх и вниз.

Нам известно, что функция возрастает в точках, где её производная положительна. Из д.у. сразу понятно, что $y' > 0$ для $x + y > 0$, $y' < 0$ для $x + y < 0$.

Функция выпукла вниз в точках, где её вторая производная положительна. В нашем случае $y'' = (x + y)' = 1 + y' = 1 + x + y$. Значит, в точках $x + y + 1 < 0$ имеем $y'' < 0$ и решения выпуклы вниз, в точках $x + y + 1 > 0$ имеем $y'' > 0$ и решения выпуклы вверх. Прямая $y = -1 - x$ является линией перегиба.

Теперь, учитывая эти знания, можно нарисовать картину решений.

Непосредственной подстановкой проверяется, что прямая $y = -1 - x$ является ко всему прочему ещё и решением д.у. Таким образом, можно выделить три типа решений. У первого график находится под прямой $y = -1 - x$, это выпуклые вверх убывающие функции. Второй тип — сама прямая $y = -1 - x$. Третий находится над прямой $y = -1-x$ и имеет один минимум. Поскольку выполняются условия теоремы Пикара во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, то через каждую точку плоскости проходит график только одного решения, значит, решения этих трёх типов не пересекаются, решения первого и и третьего типов стремятся к прямой $y = -1 - x$ при $x \to -\infty$, но не касаются её.

{нужен рисунок}

§4. Уравнения с разделяющимися переменными.

А. Рассмотрим д.у. вида

$$y' = h(x)g(y),$$

оно называется уравнением с разделяющимися переменными. Будем предполагать, что функция $h \in \mathcal{C}((a,b))$ знакопостоянна, $g \in \mathcal{C}((c,d))$.

Как обычно, для решения таких уравнений всё с функцией y переносят в левую часть, с x оставляют справа, т.е. надо поделить на $g(y)$, но перед этим убедиться, что не происходит деления на нуль.

1. Если существует число y^* такое, что $g(y^*) = 0$, то $y(x) = y^*$, $x \in (a,b)$ — решение.

2. Пусть для $y \in (c, y^*) \cup (y^*, d)$ функция g не обращается в нуль, т.е. знакопостоянна, тогда можем д.у. разделить на $g(y)$:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Проинтегрируем полученное равенство по x в пределах от $x_0 \in (a,b)$ до $x \in (a,b)$, при этом переменную интегрирования обозначим через ξ:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(\xi)}{g(y(\xi))} d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} h(\xi) d\xi.$$

В интеграле слева сделаем замену $\eta = y(\xi)$, тогда пределы интегрирования x_0 и x заменятся на $y(x_0)$ и $y(x)$, дифференциал $d\eta = y'(\xi)d\xi$:

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} h(\xi) d\xi.$$

Получили решение, заданное в неявном виде, интегралы могут браться, а могут и нет. Однако можем точно сказать, что из неявного вида функция $y(x)$ выражается. Так, если обозначим $G(y) = \int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ и $H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi$, то решение уравнения: $G(y(x)) = H(x)$. Из введённых ограничений, подынтегральное выражение знакопостоянно, значит, функция G монотонна относительно переменной y, существует обратная к ней, и тогда $y(x) = G^{-1}(H(x))$ — решение выражается явно.

Пример. Решим уравнение

$$y' = yx + x.$$

Это уравнение с разделяющимися нере967менными: $yx+x = x(y+1) = h(x)g(y)$. Функция $h(x) = x$ непрерывна для любого x, знакопостоянна в левой либо правой полуплоскости, будем рассматривать, например, $x > 0$. Функция $g(y) = y+1$ непрерывна для любого y.

1. При $y = -1$ $g(y) = 0$, значит, $y(x) = -1$, $x > 0$ — решение.

2. Для $y \neq -1$

$$\frac{y'}{y+1} = x,$$

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\eta}{\eta+1} = \int\limits_{x_0}^{x} \xi d\xi,$$

$$\ln|y(x)| - \ln|y(x_0)| = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}.$$

Обозначим $C_0 = \ln|y(x_0)| - \frac{x_0^2}{2}$, $C_0 \in \mathbb{R}$:

$$\ln|y(x)| = C_0 + \frac{x^2}{2},$$

$$|y(x)| = e^{C_0} e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}, C_1 > 0,$$

$$y(x) = \pm C_1 e^{\frac{x^2}{2}} = C_2 e^{\frac{x^2}{2}}, C_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Учитывая, что $y(x) = -1$, $x > 0$, тоже решение, то, объединяя оба случая, получаем решение

$$y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Проделывая то же самое для левой полуплоскости, получим точно такое же выражение. А по теореме Пикара через точки прямой $\{x = 0\}$ тоже проходят тешения. Получаем непродолжаемые решения

$$y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Б. Следующее уравнение

$$y' = \phi(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

заменой $z(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, поскольку

$$z'(x) = \alpha + \beta y'(x) = \alpha + \beta\phi(\alpha x + \beta y(x) + \gamma) = \alpha + \beta\phi(z(x)),$$

то д.у. на функцию z:

$$z' = \alpha + \beta\phi(z).$$

Пример.

Решим уравнение

$$y' = y + x.$$

Замена $z(x) = y(x) + x$ сводит уравнение к

$$z' = z + 1.$$

1. При $z = -1$ правая часть обращается в нуль, значит, $z(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$ — решение.

2. Пусть $z \neq -1$, тогда

$$\frac{z'}{z+1} = x,$$

$$\int\limits_{z(x_0)}^{z(x)} \frac{d\eta}{\eta + 1} = \int\limits_{x_0}^{x} d\xi,$$

$$\ln|z(x)+1| - \ln|z(x_0)+1| = x - x_0,$$

$$z(x) + 1 = C_0 e^x, C_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, x \in \mathbb{R}.$$

Объединяя оба случая, получаем общее решение уравнения на z:

$$z(x) = -1 + Ce^x, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Переходя обратно к y, запишем общее решение первоначального д.у.:

$$y(x) = -1 - x + Ce^x, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

В. Уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным уравнением, если функция f однородная степени 0, т.е. для произвольного ненулевого λ верно $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Если в качестве λ подставить $\frac{1}{x}$, то получим $f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y)$, значит, в однородной фунции аргументы x и y входят сразу отношением. Поэтому можем ввести функцию ψ: $\psi(\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y)$, и тогда однородное уравнение можно записать в виде

$$y' = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для его решения сделаем замену $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, тогда $y(x) = xz(x)$ и, подставив это произведение в д.у., получим

$$z(x) + xz'(x) = \psi(z(x)).$$

Разрешаем его относительно производной:

$$z' = \frac{\psi(z) - z}{x},$$

и получаем уравнение с разделяющимися переменными.

§5. Линейные уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Полагаем, что функции p и q непрерывны на интервале (a, b) $(p, q \in \mathcal{C}((a, b)))$, тогда правая часть д.у. $f(x, y) = p(x)y + q(x)$ непрерывна в полосе $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, её частная производная по переменной y также непрерывна в полосе D: $\frac{\partial f}{\partial y} = p(x) \in \mathcal{C}(D)$, т.е. выполняются условия теоремы Пикара. Значит, можем сразу сказать, что через каждую точку полосы D проходит график непродолжаемого решения, и только один.

Определение. Уравнение

$$y' = p(x)y \tag{2}$$

называется *линейным однородным уравнением*,

уравнение

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{3}$$

называется *линейным неоднородным уравнением.*

Следует отметить, что слово "однородное" в прошлом параграфе и в этом означает разные уравнения. Уравнения, рассматриваемые здесь, характеризуются сразу парой слов "линейное однородное" либо "линейное неоднородное". Линейность означает, что если взять два решения уравнений с разной неоднородностью (т.е. функцией q), то линейная их комбинация есть решение уравнения с линейной комбинацией неоднородностей. Более точно это свойство решений записывается в виде леммы.

Лемма (принцип суперпозиции). *Пусть*
$y_1(x)$ *— решение неоднородного уравнения* $y' = p(x)y + q_1(x)$,
$y_2(x)$ *— решение неоднородного уравнения* $y' = p(x)y + q_2(x)$,
тогда для произвольных констант C_1 *и* C_2 *функция*
$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ *является решением уравнения* $y' = p(x)y + C_1q_1(x) + C_2q_2(x)$.
Доказательство.

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения соответствующих уравнений, то выполняются тождества $y_1'(x) \equiv p(x)y_1(x) + q_1(x)$ и $y_2'(x) \equiv p(x)y_2(x) + q_2(x)$. Нам надо показать выполнения тождества $y'(x) \equiv p(x)y(x) + C_1q_1(x) + C_2q_2(x)$, что и будет означать, что функция $y(x)$ является решением нужного уравнения. Имеем

$$y'(x) \equiv C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) \equiv C_1(p(x)y_1(x) + q_1(x)) + C_2(p(x)y_2(x) + q_2(x)) \equiv$$

$$\equiv p(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) + C_1q_1(x) + C_2q_2(x) \equiv p(x)y(x) + C_1q_1(x) + C_2q_2(x).$$

Получили нужное тождество.

ЧТД

Рассмотрим теперь однородное линейное уравнение $y' = p(x)y$. Утверждение следующей теоремы сразу следует из общего решения для этого д.у. (а поскольку это уравнение с разделяющимися переменными, решается оно просто), однако для привыкания и применения к уравнениям высокого порядка мы её рассмотрим.

Теорема 1 (об общем решении однородного уравнения). *Множество решений линейного однородного уравнения — линейное пространство размерности 1.*
Доказательство.

Во-первых, надо показать линейность пространства решений, т.е. показать, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ произвольные решения уравнения $y' = p(x)y$, то их линейная комбинация $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является решением того же самого уравнения. Это сразу же следует из принципа суперпозиции.

Во-вторых, надо показать, что пространство решений одномерно, т.е. если возьмём какое-нибудь ненулевое решение $\widetilde{y}(x)$ уравнения $y' = p(x)y$, то любое другое решение $y(x)$ этого уравнения представимо в виде $y(x) = C\widetilde{y}(x)$, где C — некоторая константа. Для доказательства рассмотрим производную отношения $\frac{y(x)}{\widetilde{y}(x)}$:

$$\left(\frac{y(x)}{\widetilde{y}(x)}\right)' \equiv \frac{y'(x)\widetilde{y}(x) - y(x)\widetilde{y}'(x)}{\widetilde{y}^2(x)} \equiv \frac{p(x)y(x)\widetilde{y}(x) - y(x)p(x)\widetilde{y}(x)}{\widetilde{y}^2(x)} \equiv 0,$$

значит, $y(x) = C\widetilde{y}(x)$.

ЧТД

Следующая теорема даёт ответ на вопрос, как выглядят решения неоднородного уравнения.

Теорема 2 (о решении неоднородного уравнения). *Общее решение $y_{он}$ неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$ есть сумма общего решения $y_{оо}$ однородного уравнения $y' = p(x)y$ и частного решения $y_{част}$ неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$, т.е. $y_{он} = y_{оо} + y_{част}$.*

Пример. Уравнение $y' = y + x$ является линейным неоднородным, мы уже решали его в прошлом параграфе. Его общее решение имеет вид $y_{\text{он}} = Ce^x - x - 1 = y_{\text{оо}} + y_{\text{част}}$. Здесь $y_{\text{оо}} = Ce^x$ — общее решение $y' = y$, $y_{\text{част}} = -x - 1$ — одно из решений неоднородного $y' = y + x$.

Доказательство теоремы.

Во-первых, сумма $y_{\text{оо}} + y_{\text{част}}$ является решением неоднородного уравнения из принципа суперпозиции: $y_{\text{оо}}$ — решение $y' = p(x)y + 0$, $y_{\text{част}}$ — решение $y' = p(x)y + q(x)$, а линейная комбинация $1 \cdot y_{\text{оо}} + 1 \cdot y_{\text{част}}$ является решением $y' = p(x)y + 1 \cdot 0 + 1 \cdot q(x)$.

Во-вторых, покажем, что произвольное решение $y(x)$ неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$ представимо в виде нужной суммы. Поскольку $y(x)$ — решение $y' = p(x)y + q(x)$, $y_{\text{част}}$ — решение $y' = p(x)y + q(x)$, то разность $y(x) - y_{\text{част}}(x)$ — решение $y' = p(x)y + q(x) - q(x)$, т.е. линейного однородного уравнения, и из теоремы 1 следует, что $y(x) - y_{\text{част}}(x) = \widetilde{C}\widetilde{y}(x)$ для некоторой константы $\widetilde{C}$. В результате, $y(x) = \widetilde{C}\widetilde{y}(x) + y_{\text{част}}(x)$, т.е. произвольное решение неоднородного обязательно представимо в виде суммы.

ЧТД

Алгоритм решения линейного неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$

I. Ищем общее решение однородного уравнения $y' = p(x)y$.

Это уравнение с разделяющимися переменными.

1. $y(x) \equiv 0$ — решение.

2. Пусть $y \neq 0$, тогда

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = p(x),$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi,$$

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{d\eta}{\eta} = \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi,$$

$$\ln|y(x)| - \ln|y(x_0)| = \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi.$$

В начале параграфа показывалось, что графики решений замощают всю полосу $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, значит, x и x_0 принадлежат интервалу (a, b), а $y(x_0)$ можно брать из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Далее,

$$|y(x)| = |y(x_0)| e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi},$$

$$y(x) = \pm |y(x_0)| e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi},$$

$$y(x) = C_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi}, \text{где}\, C_0 = \pm |y(x_0)| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Объединяя результаты пунктов 1 и 2, получаем общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}}(x) = C e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi}, \text{где} C \in \mathbb{R}.$$

Ненулевое решение $\widetilde{y}$ однородного уравнения из теоремы 1 можно взять следующим $\widetilde{y}(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi}$, тогда $y_{\text{оо}}(x) = C\widetilde{y}(x)$, где $C \in \mathbb{R}$.

II. Ищем частное решение неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$.

Метод вариации произвольной постоянной.

Частное решение ищем почти в виде общего решения однородного уравнения, только вместо константы C берём функцию, т.е. $y_{\text{част}}(x) = u(x)\widetilde{y}(x)$, и теперь надо найти подходящую $u(x)$, чтобы при подстановке этого произведения в неоднородное уравнение получалось тождество.

В левой части неоднородного уравнения:

$$y'_{\text{част}}(x) = u'(x)\widetilde{y}(x) + u(x)\widetilde{y}'(x) = u'(x)\widetilde{y}(x) + u(x)p(x)\widetilde{y}(x),$$

в правой части неоднородного уравнения:

$$p(x)y_{\text{част}}(x) + q(x) = p(x)u(x)\widetilde{y}(x) + q(x),$$

тождество получится, если

$$u'(x)\widetilde{y}(x) = q(x),$$

отсюда находится $u(x)$:

$$u'(x) = \frac{q(x)}{\widetilde{y}(x)},$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} u'(\xi)d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(\xi)}{\widetilde{y}(\xi)}d\xi,$$

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(\xi)}{\widetilde{y}(\xi)}d\xi + u(x_0).$$

Таким образом, функция $\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(\xi)}{\widetilde{y}(\xi)}d\xi + u_0\right)\widetilde{y}(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения при произвольной константе u_0.

III. Ищем общее решение неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$.

Применяя утверждение теоремы 2 и результаты двух предыдущих пунктов, общее решение неоднородного уравнения записывается в виде

$$y_{\text{он}}(x) = C\widetilde{y}(x) + \left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(\xi)}{\widetilde{y}(\xi)}d\xi + u_0\right)\widetilde{y}(x)$$

Первое и третье слагаемые можно объединить, поскольку C и u_0 произвольные константы. В итоге

$$y_{\text{он}}(x) = C\widetilde{y}(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(\xi)}{\widetilde{y}(\xi)}d\xi\widetilde{y}(x),$$

В такой записи понятно, что при нахождении частного решения $y_{\text{част}}$ можно было константу u_0 взять любым конкретным числом, в частности нулём. Общее решение найдено.

Пример. Решим линейное неоднородное уравнение

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2.$$

Согласно алгоритму находим общее решение однородного уравнения

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому сразу находим решение $y(x) = 0$, после чего считаем, что $y \neq 0$, разделяем переменные $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$ и интегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx,$$

$$y(x) = Cx^2, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Учитывая решение $y(x) = 0$, получаем

$$y_{\text{OO}}(x) = Cx^2, C \in \mathbb{R}.$$

Теперь ищем частное решение уравнения $y' = \frac{2y}{x} + x^2$ методом вариации произвольной постоянной, т.е.в виде

$$y_{\text{част}}(x) = u(x)x^2.$$

Подставим это представление в уравнение:

$$y'_{\text{част}}(x) = u'(x)x^2 + u(x)2x,$$

$$\frac{2y_{\text{част}}}{x} + x^2 = \frac{2u(x)x^2}{x} + x^2,$$

получаем

$$u'(x)x^2 + u(x)2x = \frac{2u(x)x^2}{x} + x^2,$$

$$u'(x)x^2 = x^2,$$

$$u'(x) = 1,$$

$$u(x) = x + u_0.$$

Таким образом, произвольное частное решение имеет вид

$$y_{\text{част}}(x) = (x + u_0)x^2,$$

а поскольку нам надо одно частное решение, то можем взять u_0, например, равное нулю, тогда

$$y_{\text{част}}(x) = x^3.$$

В итоге все решения неоднородного уравнения $y' = \frac{2y}{x} + x^2$ записываются следующим образом:

$$y(x) = Cx^2 + x^3.$$

§6. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати.

Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0, 1$, называется *уравнением Бернулли.* Если $\alpha = 0$, то это линейное неоднородное уравнение, его научились решать в прошлом параграфе, если $\alpha = 1$, то это уравнение с разделяющимися переменными.

Полагаем, что функции p и q непрерывны на интервале (a, b), т.е. $p, q \in \mathcal{C}((a, b))$.

При $\alpha > 0$ правая часть д.у. определена в полосе $(a, b) \times \mathbb{R}$, $y(x) = 0$ решение. При $\alpha < 0$ правая часть д.у. определена на $(a, b) \times \mathbb{R} \setminus \{y = 0\}$.

Для решения уравнения Бернулли сделаем замену, которая приведёт к линейному уравнению. Сначала разделим его на y^α (запомнив при этом, является ли $y(x) = 0$ решением), получим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + q(x).$$

Можно заметить, что

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{y(x)^{\alpha-1}}\right)'$$

тогда уравнение преобразуется в

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{y(x)^{\alpha-1}}\right)' = p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + q(x).$$

Здесь можно заметить, какую замену надо провести. Это $z(x) = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}(x)}$, тогда уравнение станет

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = p(x)z + q(x)$$

или

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x),$$

т.е. линейным неоднородным.

Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$

называется *уравнением Риккати*. Такое уравнение уже сложнее, его решения не всегда возможно представить в виде элементарных функций, однако можно заметить, что если найдено какое-либо его частное решение $y_{\text{част}}(x)$, то замена $w(x) = y(x) - y_{\text{част}}$ сведёт это уравнение у уравнению Бернулли. Действительно, подставим $y(x) = w(x) + y_{\text{част}}$ в уравнение Риккати:

$$(w + y_{\text{част}})' = p(x)(w + y_{\text{част}}) + q(x)(w + y_{\text{част}})^2 + r(x)$$

$$w' + y'_{\text{част}} = p(x)w + p(x)y_{\text{част}} + q(x)w^2 + 2q(x)wy_{\text{част}} + q(x)y^2_{\text{част}} + r(x).$$

Поскольку $y_{\text{част}}$ является частным решением, то выполняется тождество

$$y'_{\text{част}} \equiv p(x)y_{\text{част}} + q(x)y^2_{\text{част}} + r(x),$$

и уравнение Риккати перейдёт в

$$w' = p(x)w + q(x)w^2 + 2q(x)wy_{\text{част}}.$$

А это уравнение Бернулли:

$$w' = (p(x) + 2q(x)y_{\text{част}})w + q(x)w^2.$$

Пример. Решим уравнение Риккати

$$y' = -xy + y^2 + 1.$$

Можно заметить, что $y(x) = x$ — решение этого д.у., поэтому сделаем замену $w(x) = y(x) - x$. Подставим $y(x) = w(x) + 1$ в уравнение:

$$w' + 1 = -x(w + x) + (w + x)^2 + 1.$$

Раскроем скобки, приведём общие слагаемые и получим

$$w' = xw + w^2.$$

Это уравнение Бернулли. Надо делать ещё замену. Запомним, что $w(x) = 0$ решение, и для $w \neq 0$ поделим д.у. на w^2:

$$\frac{w'}{w^2} = x\frac{1}{w} + 1,$$

$$-\left(\frac{1}{w}\right)' = x\frac{1}{w} + 1.$$

Теперь делаем вторую замену $z(x) = \dfrac{1}{w(x)}$, уравнение станет

$$z' = -xz - 1.$$

Это линейное неоднородное уравнение. Общее решение однородного

$$z' = -xz$$

есть $z_{\text{оо}}(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$. Частное решение ищем в виде $z_{\text{част}}(x) = u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Подставляем его в неоднородное уравнение $z' = -xz - 1$:

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} - xue^{-x^2} = -xue^{-\frac{x^2}{2}} - 1,$$

$$u' = -e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$u' = -\int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi + u_0.$$

Можно взять $u_0 = 0$, и общее решение уравнения $z' = -xz - 1$ имеет вид

$$z(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C - \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi\right).$$

Проделав обратную замену $w = \frac{1}{z}$, получаем общее решение уравнения $w' = xw + w^2$:

$$\left[\begin{array}{l} w(x) = \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{C - \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi}, \\ w(x) = 0. \end{array}\right.$$

И последняя замена $y = w + x$ даст решение исходного уравнения Риккати $y' = -xy + y^2 + 1$:

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = x + \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{C - \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi}, \\ y(x) = x. \end{array}\right.$$

Стоит заметить, что решение $y(x) = x$ не получается из первого семейства ни для каких констант $C \in \mathbb{R}$.

§7. Уравнения в симметричной форме

Иногда дифференциальные уравнения записывают в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (4)$$

Эта запись включает в себя два уравнения:
в случае, когда $Q(x, y) \neq 0$, можем выразить $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, неизвестная функция $y = y(x)$;
в случае, когда $P(x, y) \neq 0$, можем выразить $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, неизвестная функция $x = x(y)$.

Пример. Решим уравнение

$$xydx + (x + 1)dy = 0.$$

Здесь $P(x, y) = xy$, $Q(x, y) = x + 1$.

Для $x \neq -1$ имеем уравнение на y:

$$y' = -\frac{xy}{x + 1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение $y \equiv 0$ запоминаем и разделяем переменные:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x + 1},$$

$$ln|y(x)| = ln|x + 1| - x + C_0, \; C_0 \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = C_1(x + 1)e^{-x}, \; C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Решение уравнения, разрешённого относительно y': $y(x) = C(x + 1)e^{-x}, \; C \in \mathbb{R}$.

Для $x \neq 0$ и $y \neq 0$ имеем уравнение на x:

$$x' = -\frac{x + 1}{xy}.$$

Это опять уравнение с разделяющимися переменными. Решение $x = -1$ запоминаем и разделяем переменные:

$$-\int \frac{xdx}{x + 1} = \int \frac{dy}{y},$$

$(x(y)+1)e^{-x(y)} = C_1 y,\ C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Решение уравнения, разрешённого относительно x' задаётся неявно:$(x(y)+1)e^{-x(y)} = Cy,\ C \in \mathbb{R}$.

Видно, что в первое семейство решений не входит $x = -1$, поскольку это не фунция от x, а во второе семейство решений не входит $y = 0$, поскольку это не функция от y. Решение изначального уравнения в симметричной форме должно включать все решения обоих этих уравнений, значит, ответ здесь

$$\left[\begin{array}{l} (x+1)e^{-x} = Cy,\ C \in \mathbb{R}, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

либо в другой записи

$$\left[\begin{array}{l} y = C(x+1)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

§8. Уравнение в полных дифференциалах

Кроме выделения в уравнении в симметричной форме двух уравнений разрешённых относительно производных, решать его можно и другими способами.

Пусть в уравнении

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4}$$

функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ гладкие ($P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$, т.е. они сами непрерывны и непрерывны все их первые частные производные).

Определение. Уравнение (4) — *уравнение в полных дифференциалах*, если существует функция $u(x,y)$ класса $\mathcal{C}^2$ ($u \in \mathcal{C}^2$, т.е. непрерывна функция, все её первые и вторые частные производные) такая, что $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$.

Если (4) вполных дифференциалах, то его можно записать в виде

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

и свернуть здесь полный дифференциал

$$du(x,y) = 0.$$

Таким образом, $u(x,y) = C$ есть решение уравнения, возможно, решение в неявном виде, C — константа.

Определение. Функция u называется *потенциалом*, *интегралом* или *первым интегралом* уравнения (4).

Лемма 1. *Пусть (4) — уравнение в полных дифференциалах, тогда* $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Доказательство. Уравнение (4) в полных дифференциалах, тогда существует $u \in \mathcal{C}^2$ такая, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases}$$

Продифференцируем первое равенство по y, а второе по x:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{P(x,y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{Q(x,y)}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Поскольку $u \in \mathcal{C}^2$, то её смешанные производные равны:

$$\frac{P(x,y)}{\partial y} = \frac{Q(x,y)}{\partial x}.$$

ЧТД

Утверждение в обратную сторону тоже имеется, но надо накладывать условия на множество D, где всё происходит.

Определение. Точка $(x_*, y_*) \in D$ называется *особой*, если $P(x_*, y_*) = Q(x_*, y_*) = 0$.

Определение. Множество D называется *односвязным*, если любая замкнутая кривая в нём стягивается в точку в D.

Лемма 2. *Пусть D — односвязное множество, не содержащее особых точек, и $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ для $(x,y) \in D$, тогда уравнение (4) — уравнение в полных дифференциалах.*

Пример. Решим уравнение в симметричной форме

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2y\right) dy = 0.$$

Здесь $P(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$, $Q(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2y$, область определения этих функций $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\{x=0\} \cup \{y=0\}\}$. Найдём особые точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2y = 0, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = y, \\ 2y = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -y, \\ \frac{2}{y} + 2y = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -i, \\ y = i, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = i, \\ y = -i. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Эти три точки не принадлежат множеству $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\{x=0\} \cup \{y=0\}\}$. Выберем теперь в D односвязное множество. Это может быть любая из четвертей, например, первая.

Итак, множество $\{x > 0, y > 0\}$ односвязное, не содержит особых точек, и в нём

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}, \\ \dfrac{Q(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}, \end{array} \right.$$

значит, по лемме 2, существует функция $u \in \mathcal{C}^2$ такая, что

$$\begin{cases} \dfrac{u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}, \\ \dfrac{u(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2} + 2y, \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение этой системы по x:

$$u(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + u_0(y).$$

Заметим, что "константа" интегрирования может зависить от y. Теперь от полученного выражения возьмём частную производную по y:

$$\frac{u(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + u_0'(y).$$

Сравним это выражение со вторым уравнением системы. Получается, что

$$u_0'(y) = 2y,$$

$$u_0(y) = y^2 + u_1.$$

Здесь u_1 — константа, не зависящая ни от x, ни от y. В результате,

$$u(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y^2 + u_1,$$

а решение уравнения записывается в неявном виде:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y^2 = C.$$

§9. Интегрирующий множитель

В случае, если уравнение (4) не в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

его можно попытаться сделать таковым, домножив на некоторую ненулевую гладкую функцию $\mu(x,y)$. Т.е. ищем ненулевую функцию μ такую, чтобы уравнение

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

стало уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)P(x,y)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right)}{\partial x}.$$

Раскрыв производные получаем уравнение с частными производными:

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x.$$

Решать такие уравнения мы пока не умеем, на данном этапе можем только пытаться угадать его решения.

Определение. Такая функция μ называется *интегрирующим множителем.*

Теорема. *Если точка* (x_0, y_0) *из множества* D *неособая, то существует её окрестность* $\widetilde{D}$, $\widetilde{D} \subset D$, *в которой существует интегрирующий множитель* μ, *т.е. существует* $\mu \in \mathcal{C}^2$, *для которого уравнение* $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ *в полных дифференциалах.*

Пример. Решим уравнение в симметричной форме

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0.$$

Здесь $P_y(x,y) = 2x$, $Q_x(x,y) = -2x$, и это уравнение не в полных дифференциалах. Будем искать ненулевую функцию μ, для которой уравнение

$$\mu(x,y)2xydx + \mu(x,y)(y^2 - x^2)dy = 0$$

в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial\Big(\mu(x,y)2xy\Big)}{\partial y} = \frac{\partial\Big(\mu(x,y)(y^2-x^2)\Big)}{\partial x}.$$

$$2xy\mu_y + 2x\mu = \mu_x(y^2 - x^2) - 2x\mu,$$

$$2xy\mu_y + 4x\mu = \mu_x(y^2 - x^2).$$

Можно заметить, что если будем искать функцию μ, зависящую только от y, то уравнение упростится

$$2xy\mu_y + 4x\mu = 0,$$

$$y\mu_y = -2\mu,$$

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{2\mu}{y},$$

и станет обыкновенным дифференциальным с разделяющимися переменными. Его решения $\mu(y) = \dfrac{C}{y^2}$. Поскольку нам достаточно одного интегрирующего множителя, то возьмём, например, $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$. Домножим на него исходное уравнение:

$$\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{2x}{y} = -\dfrac{2x}{y^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1-\dfrac{x^2}{y^2}\right) = -\dfrac{2x}{y^2}$, получили уравнение в полных дифференциалах, значит,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1-\dfrac{x^2}{y^2}, \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение этой системы по x:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y} + u_0(y).$$

Теперь от полученного выражения возьмём частную производную по y:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + u_0'(y).$$

Сравним это выражение со вторым уравнением системы. Получается, что

$$u_0'(y) = 1,$$

$$u_0(y) = y + u_1.$$

Здесь u_1 — константа, не зависящая ни от x, ни от y. В результате, $u(x,y) = \frac{x^2}{y}+y+u_1$, а решение уравнения записывается в неявном виде:

$$\frac{x^2}{y} + y = C.$$

§10. Доказательство теоремы Пикара.

Докажем теперь теорему Пикара. Мы рассматриваем задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \qquad (\text{ЗК}(x_0,y_0))$$

где $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема Пикара.

Пусть

$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$ *(т.е. функции* f *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывна на множестве* D*),*

$D \subset \mathbb{R}^2$ *— непустое открытое множество,*

тогда

для любой точки $(x_0,y_0) \in D$ *существует единственное непродолжаемое решение ЗК*(x_0,y_0)*,*

и оно определено на открытом интервале $(\alpha(x_0,y_0), \omega(x_0,y_0))$.

Доказательство состоит из четырёх частей, в каждой из которых мы докажем по лемме:

I. Сведение решения задачи Коши к решению интегрального уравнения;
II. Локальное существование решения задачи Коши;
III. Локальная единственность решения задачи Коши;
IV. Непродолжаемое решение задачи Коши определено на открытом интервале.

I. Сведение решения задачи Коши к решению интегрального уравнения

Лемма 1. *Функция $y : \langle \alpha, \omega \rangle \to \mathbb{R}$ является решением задачи Коши ЗК(x_0, y_0) тогда и только тогда, когда функция $y(x)$ класса $\mathcal{C}$ является решением интегрального уравнения*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \text{ при } x \in \langle \alpha, \omega \rangle.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $y : \langle \alpha, \omega \rangle \to \mathbb{R}$ является решением задачи Коши ЗК(x_0, y_0), тогда

$$\begin{cases} y(x)' = f(x, y(x)) \text{ при } x \in \langle \alpha, \omega \rangle, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение по x:

$$\begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} y(\xi)' d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \text{ при } x, x_0 \in \langle \alpha, \omega \rangle, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\begin{cases} y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \text{ при } x, x_0 \in \langle \alpha, \omega \rangle, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

и в результате получим требуемое равенство:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \text{ при } x \in \langle \alpha, \omega \rangle.$$

Как решение задачи Коши функция $y(x)$ класса $\mathcal{C}^1$, а значит, и класса $\mathcal{C}$.

Достаточность. Пусть непрерывная функция $y(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

при $x \in \langle \alpha, \omega \rangle$. Отсюда сразу же

$$y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(\xi, y(\xi))d\xi = y_0.$$

Продифференцируем интегральное уравнение по x:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

при $x \in \langle \alpha, \omega \rangle$. Мы можем дифференцировать, поскольку f непрерывна, y непрерывна, значит, $f(x, y(x))$ непрерывна при $x \in \langle \alpha, \omega \rangle$, тогда $\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$ непрерывно-дифференцируема, получается, что и левая часть интегрального уравнения непрерывно-дифференцируема, т.е. $y \in \mathcal{C}^1(\langle \alpha, \omega \rangle)$. В результате получили $y'(x) = f(x, y(x))$ при $x \in \langle \alpha, \omega \rangle$ и $y(x_0) = y_0$, т.е. функция $y : \langle \alpha, \omega \rangle \to \mathbb{R}$ является решением задачи Коши ЗК(x_0, y_0).

Лемма 1 доказана.

II. Локальное существование решения задачи Коши

Здесь введём обозначения.

Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in D$. Поскольку D — открытое множество, то вместе с этой точкой в D входит некоторая её окрестность, выберем её замкнутым прямоугольником с центром (x_0, y_0), сторонами $2a$ и $2b$ и обозначим через Π:

$$\Pi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\right\}.$$

Числа a и b подобраны так, что $\Pi \in D$.

Поскольку $f \in \mathcal{C}(D)$, то $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ и по теореме Вейерштрасса существует

$$F = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|. \tag{$*$}$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, то $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(\Pi)$ и по теореме Вейерштрасса существует

$$L = \max_{(x,y)\in\Pi} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|. \tag{$**$}$$

Из теоремы о среднем: если $(x, y_1) \in \Pi$, $(x, y_2) \in \Pi$, $y_1 < y_2$, то существует c: $y_1 \leqslant c \leqslant y_2$, для которого

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)(y_2 - y_1),$$

тогда

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| |(y_2 - y_1)|,$$

и получаем неравенство, которое понадобится в дальнейшем:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L|(y_2 - y_1)|. \tag{$***$}$$

И введём ещё одно обозначение:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{F}\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, D *— непустое открытое множество, тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in D$ *существует решение ЗК*(x_0, y_0)*, определённое на замкнутом промежутке* $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Для доказательства леммы предъявим решение задачи Коши, предоставим метод его нахождения. Рассмотрим последовательность функций $\{y^{[k]}(x)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, задаваемую рекуррентно:

$$\begin{aligned}
&y^{[0]}(x) = y_0,\\
&y^{[1]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi,\\
&y^{[2]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[1]}(\xi))d\xi,\\
&\ldots\\
&y^{[k]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[k-1]}(\xi))d\xi,\ k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Покажем, что
А) Последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$ корректно определена для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$;
Б) Последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$ равномерно сходится при $k \to \infty$ для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$;
В) Предел последовательности $\{y^{[k]}(x)\}$ есть решение ЗК(x_0, y_0) для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Итак, по порядку.

А) Последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$**,** $k = 0, 1, \ldots,$ **корректно определена для** $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$**.**

Иначе говоря, интегралы, стоящие в правой части корректно определены, для этого достаточно показать, что подынтегральная функция определена в точках, где происходит интегрирование, т.е. $(x, y^{[k]}(x)) \in D$ при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $k = 0, 1, \ldots$ Мы докажем ещё более строгий результат: $(x, y^{[k]}(x)) \in \Pi$ при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $k = 0, 1, \ldots$, т.е. графики функций $\{y^{[k]}(x)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, целиком лежат в Π при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Сначала покажем, что графики не выходят за пределы Π по оси OX, т.е. $|x - x_0| \leqslant a$ при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ (заметим, что $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ эквивалентно$|x - x_0| \leqslant h$):

$$|x - x_0| \leqslant h = \min\left\{a, \frac{b}{F}\right\} \leqslant a.$$

Теперь покажем, что графики не выходят за пределы Π по оси OY, т.е. $|y^{[k]} - y_0| \leqslant b$ при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $k = 0, 1, \ldots$ Докажем это по индукции.

При $k = 0$: $|y^{[0]} - y_0| = |y_0 - y_0| = 0 < b$.

При $k = 1$:

$$|y^{[1]} - y_0| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi - y_0 \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|d\xi \right| \leqslant$$

$$\left\{ \text{поскольку } (\xi, y_0) \in \Pi, \text{то } |f(\xi, y_0)| \leqslant F \right\} \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} F d\xi \right| = F \left| \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \right| = F|x - x_0| \leqslant Fh =$$

$$F \min\left\{a, \frac{b}{F}\right\} \leqslant F\frac{b}{F} = b.$$

Пусть при $k = n$ верно $|y^{[n]} - y_0| \leqslant b$, тогда при $k = n + 1$:

$$|y^{[n+1]} - y_0| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n]}(\xi)) d\xi - y_0 \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n]}(\xi)) d\xi \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y^{[n]}(\xi))| d\xi \right| \leqslant$$

$$\left\{ \text{поскольку по индукционному предположению} (\xi, y^{[n]}(\xi)) \in \Pi, \text{то } |f(\xi, y^{[n]}(\xi))| \leqslant F \right\} \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} F d\xi \right| = F \left| \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \right| = F|x - x_0| \leqslant Fh = F \min\left\{a, \frac{b}{F}\right\} \leqslant F\frac{b}{F} = b.$$

Индукционное предположение доказано. Таким образом, показали, что графики функций $\{y^{[k]}(x)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, целиком лежат в Π при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Б) Последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$ равномерно сходится при $k \to \infty$ для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Сведём исследование равномерной сходимости последовательности к равномерной сходимости суммы ряда, для этого представим $y^{[k]}(x)$ в виде суммы ряда:

$$y^{[k]}(x) = y^{[0]}(x) + \big(y^{[1]}(x) - y^{[0]}(x)\big) + \big(y^{[2]}(x) - y^{[1]}(x)\big) + \cdots + \big(y^{[k]}(x) - y^{[k-1]}(x)\big) =$$

$$y_0 + \sum_{i=1}^{k} \big(y^{[i]}(x) - y^{[i-1]}(x)\big)$$

Теперь нас интересует равномерная сходимость суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} \big(y^{[i]}(x) - y^{[i-1]}(x)\big)$ для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ при $k \to \infty$. Применим здесь признак сходимости Вейерштрасса, найдём сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, мажорирующий наш: для всех $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ $\big|y^{[i]}(x) - y^{[i-1]}(x)\big| \leqslant b_i$. Для этого докажем по индукции, что

$$\big|y^{[i]}(x) - y^{[i-1]}(x)\big| \leqslant F L^{i-1} \frac{|x - x_0|^i}{i!} \text{ для } x \in [x_0 - h, x_0 + h], i \geqslant 1.$$

При $i = 1$:

$$\big|y^{[1]}(x) - y^{[0]}(x)\big| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi - y_0 \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)| d\xi \right| \leqslant$$

$$\left\{ |f(\xi, y_0(\xi))| \leqslant F \right\} \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} F d\xi \right| = F \left| \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \right| = F|x - x_0|.$$

При $i = 2$:

$$\left|y^{[2]}(x) - y^{[1]}(x)\right| = \left|y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[1]}(\xi))d\xi - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| =$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[1]}(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} \big(f(\xi, y^{[1]}(\xi)) - f(\xi, y_0)\big)\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} \left|f(\xi, y^{[1]}(\xi)) - f(\xi, y_0)\right| d\xi\right| \leqslant \left\{ \text{поскольку } (\xi, y^{[1]}(\xi)), (\xi, y_0) \in \Pi, \text{воспользуемся } (***) \right\} \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} L\left|y^{[1]}(\xi) - y_0\right| d\xi\right| \leqslant \left\{ \text{из доказанного выше } |y^{[1]}(\xi) - y_0| \leqslant F|\xi - x_0| \right\} \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} LF\left|\xi - x_0\right| d\xi\right| = LF\left|\int\limits_{x_0}^{x} \left|\xi - x_0\right| d\xi\right| =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } x \geqslant x_0, \text{ то } \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x_0)d\xi = \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \text{если } x < x_0, \text{ то } \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi = -\int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x_0)d\xi = -\frac{(x - x_0)^2}{2} \end{array} \right\} = FL\frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Пусть при $i = n$ верно

$$\left|y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)\right| \leqslant FL^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \text{ для } x \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

тогда при $i = n + 1$:

$$\left|y^{[n+1]}(x) - y^{[n]}(x)\right| = \left|y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n+1]}(\xi))d\xi - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n]}(\xi))d\xi\right| =$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n+1]}(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[n]}(\xi))d\xi\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} \big(f(\xi, y^{[n+1]}(\xi)) - f(\xi, y^{[n]}(\xi))\big)\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} \left|f(\xi, y^{[n+1]}(\xi)) - f(\xi, y^{[n]}(\xi))\right| d\xi\right| \leqslant$$

$$\left\{ \text{поскольку } (\xi, y^{[n+1]}(\xi)), (\xi, y^{[n]}(\xi)) \in \Pi, \text{воспользуемся } (***) \right\} \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} L\left|y^{[n+1]}(\xi)-y^{[n]}(\xi)\right|d\xi\right| \leqslant \left\{\text{ из предположения индукции }\right\} \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} LFL^{n-1}\frac{|\xi-x_0|^n}{n!}d\xi\right| = FL^n\left|\int\limits_{x_0}^{x}|\xi-x_0|^n\,d\xi\right| = FL^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Индукционное предположение доказано. Отсюда сразу следует оценка

$$|y^{[i]}(x)-y^{[i-1]}(x)| \leqslant FL^{i-1}\frac{h^i}{i!}\;\text{для}\;x\in[x_0-h,x_0+h], i\geqslant 1.$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ с $b_i = FL^{i-1}\dfrac{h^i}{i!}$ сходится:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} FL^{i-1}\frac{h^i}{i!} = \frac{F}{L}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{L^ih^i}{i!} = \frac{F}{L}\left(e^{Lh}-1\right).$$

Значит, последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $y(x)$ при $k\to\infty$ для $x\in[x_0-h,x_0+h]$.

B) Предел последовательности $\{y^{[k]}(x)\}$ есть решение ЗК(x_0,y_0) для $x\in[x_0-h,x_0+h]$.

По определению последовательности $\{y^{[k]}(x)\}$

$$y^{[k]}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[k-1]}(\xi))d\xi.$$

При $k\to\infty$ левая часть равенства равномерно сходится к $y(x)$:

$$y^{[k]}(x) \rightrightarrows y(x),\;\text{для}\;x\in[x_0-h,x_0+h].$$

Правая часть при этом также равномерно сходится:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,y^{[k-1]}(\xi))d\xi \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,y(\xi))d\xi,\;\text{для}\;x\in[x_0-h,x_0+h].$$

Доказывается это по определению равномерной сходимости. Последовательность $\{y^{[k]}(x)\}$ равномерно сходится к функции $y(x)$для $x\in[x_0-h,x_0+h]$, т.е. для любого $x\in[x_0-h,x_0+h]$ для произвольного $\widetilde{\varepsilon}$ найдётся номер $\widetilde{N}(\widetilde{\varepsilon})$ такой, что для всех $k>\widetilde{N}(\widetilde{\varepsilon})$ $|y^k(x)-y(x)|\leqslant\widetilde{\varepsilon}$. Покажем равномерную сходимость интегралов. Рассмотрим

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,y^{[k-1]}(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,y(\xi))d\xi\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x}\left(f(\xi,y^{[k-1]}(\xi)-f(\xi,y(\xi))\right)d\xi\right| \leqslant$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left|f(\xi,y^{[k-1]}(\xi)-f(\xi,y(\xi))\right|d\xi\right| \leqslant$$

$$\left\{ \text{поскольку } (\xi, y^{[k-1]}(\xi)), (\xi, y(\xi)) \in \Pi, \text{воспользуемся } (***) \right\} \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} L \left| y^{[k-1]}(\xi) - y(\xi) \right| d\xi \right|.$$

Если $|y^k(x) - y(x)| \leqslant \widetilde{\varepsilon}$, то

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[k-1]}(\xi)) d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} L\widetilde{\varepsilon} d\xi \right| = L\widetilde{\varepsilon} \left| \int\limits_{x_0}^{x} d\xi \right| = L\widetilde{\varepsilon}|x - x_0|.$$

Теперь для любого $x \in [x_0-h, x_0+h]$ для произвольного ε возьмём номер $N = N(\varepsilon) = \widetilde{N}\left(\frac{\varepsilon}{Lh}\right)$, тогда для всех $k > N(\varepsilon)$

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y^{[k-1]}(\xi)) d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} L \left| y^{[k-1]}(\xi) - y(\xi) \right| d\xi \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} L \frac{\varepsilon}{Lh} d\xi \right| = \frac{\varepsilon}{h}|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon.$$

Т.е. интегралы равномерно сходятся.

В результате, получаем равенство

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi \text{ при } x \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

значит, $y(x)$ является решением интегрального уравнения, а по лемме 1 и решением задачи Коши.

Лемма 2 доказана.

III. Локальная единственность решения задачи Коши

Лемма 3. *Пусть*
$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, D *— непустое открытое множество, точка* $(x_0, y_0) \in D$,
функция $\varphi(x)$ *— решение задачи Коши*(x_0, y_0), *определённое на* $\langle c, d \rangle$, *график которого целиком в прямоугольнике П,*
функция $\psi(x)$ *— решение задачи Коши*(x_0, y_0), *определённое на* $\langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$, *график которого целиком в прямоугольнике П*

тогда
$\varphi(x) = \psi(x)$ *при* $x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$.
Доказательство.

Рассмотрим разность $\varphi(x) - \psi(x)$ и покажем, что она равна 0 при $x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$. Поскольку $\varphi(x)$ — решение задачи Коши(x_0, y_0), то она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \text{ при } x \in \langle c, d \rangle,$$

поскольку $\psi(x)$ — решение задачи Коши(x_0, y_0), то она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi \text{ при } x \in \langle c, d \rangle,$$

тогда имеем оценку

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left(f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi)) \right) d\xi \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| \, d\xi \right| \leqslant$$

$$\left\{ \text{графики функций } \varphi(x) \text{ и } \psi(x) \text{ лежат в } \Pi \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle \text{, то воспользуемся (***)} \right\}$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} L \, |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \, d\xi \right|.$$

Рассмотрим случай $x_0 \leqslant x$. Обозначим

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \, d\xi,$$

тогда $u(x_0) = 0$, $u(x) > 0$ и $u'(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$, а подставляя новое обозначение в последнее неравенство, получим

$$u'(x) \leqslant Lu(x) \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle,$$

$$u'(x) - Lu(x) \leqslant 0 \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle,$$

$$u'(x)e^{-hx} - Lu(x)e^{-hx} \leqslant 0 \cdot e^{-hx} \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle,$$

$$\left(u(x)e^{-hx} \right)' \leqslant 0 \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle.$$

Значит, функция $u(x)e^{-hx}$ убывает при $x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle$, тогда для $x_0 \leqslant x$ имеем

$$u(x_0)e^{-hx_0} \geqslant u(x)e^{-hx} \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle,$$

$$0 \geqslant u(x)e^{-hx} \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle,$$

$$0 \geqslant u(x) \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям

$$0 \geqslant \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \, d\xi \text{ при } x \in \langle c, d \rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d} \rangle.$$

Поскольку $x_0 \leqslant x$ и $|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \geqslant 0$, то из полученного неравенства получается единственный вариант

$$|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| = 0 \,\text{при}\, x \in \langle c, d\rangle \cap \langle \widetilde{c}, \widetilde{d}\rangle.$$

Лемма 3 доказана.

IV. Непродолжаемое решение задачи Коши определено на открытом интервале.

Лемма 4. *Пусть*
$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, *$D$ — непустое открытое множество, точка $(x_0, y_0) \in D$, функция $y(x)$ — непродолжаемое решение задачи Коши(x_0, y_0), определённое на $\langle \alpha, \omega\rangle$, тогда*
$\langle \alpha, \omega\rangle$ не содержит концы: $\langle \alpha, \omega\rangle = (\alpha, \omega)$.
Доказательство.

Предположим противное, пусть $\omega \in \langle \alpha, \omega\rangle$, $\langle \alpha, \omega\rangle = \langle \alpha, \omega]$. По определению, график функции целиком лежит в D, значит, $(\omega, y(\omega)) \in D$ (обозначим $y(\omega) = y_\omega$). Тогда по лемме 2 через (ω, y_ω) обязательно проходит своё решение уравнения $y' = f(x, y)$, обозначим его $\widetilde{y}(x)$, определено оно на некотором интервальчике $[\omega - \widetilde{h}, \omega + \widetilde{h}]$, причём $\widetilde{y}(\omega) = y_\omega$. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \begin{cases} y(x) \,\text{при}\, x \in \langle \alpha, \omega], \\ \widetilde{y}(x) \,\text{при}\, x \in (\omega, \omega + \widetilde{h}]. \end{cases}$$

Эта функция, во-первых, является гладкой на $\langle \alpha, \omega + \widetilde{h}]$. Вопрос гладкости возникает только при $x = \omega$, но в ней пределы z' слева и справа совпадают:

$$z'(x)\Big|_{x\to\omega-0} = y'(x)\Big|_{x\to\omega-0} = f(x, y(x))\Big|_{x\to\omega-0} = f(\omega, y(\omega)),$$

$$z'(x)\Big|_{x\to\omega+0} = \widetilde{y}'(x)\Big|_{x\to\omega+0} = f(x, \widetilde{y}(x))\Big|_{x\to\omega+0} = f(\omega, y(\omega)).$$

Во-вторых, $z(x)$ является решением уравнения $y' = f(x, y)$ при $\langle \alpha, \omega + \widetilde{h}]$:

$$z'(x) \equiv \begin{cases} y(x) \,\text{при}\, x \in \langle \alpha, \omega], \\ \widetilde{y}(x) \,\text{при}\, x \in (\omega, \omega + \widetilde{h}] \end{cases} =$$

$$\begin{cases} f(x, y(x)) \,\text{при}\, x \in \langle \alpha, \omega], \\ f(x, \widetilde{y}(x)) \,\text{при}\, x \in (\omega, \omega + \widetilde{h}] \end{cases} = f(x, z(x)) \,\text{при}\, x \in \langle \alpha, \omega + \widetilde{h}].$$

В-третьих, $z(x_0) = y(x_0) = y_0$. Таким образом, функция $z(x)$, определённая на $\langle \alpha, \omega + \widetilde{h}]$, является решением задачи Коши(x_0, y_0), в то время как функция $y(x)$, определённая на $\langle \alpha, \omega]$, является непродолжаемым решением задачи Коши(x_0, y_0). Получили противоречие. Значит, $\omega \notin \langle \alpha, \omega\rangle$. Аналогично доказывается, что $\alpha \notin \langle \alpha, \omega\rangle$.

Лемма 4 доказана.

Теорема Пикара доказана.

§11. Поведение непродолжаемых решений

Напомним, что компакт — это ограниченное замкнутое множество.

Теорема о покидании компакта. *Пусть*
$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, D *— непустое открытое множество, точка* $(x_0, y_0) \in D$,
функция $y(x)$ *— непродолжаемое решение задачи Коши*(x_0, y_0), *определённое на* (α, ω),
Γ *— произвольный компакт в* D, *содержащий* (x_0, y_0),
тогда
существуют числа r_-, $r_+ \in \mathbb{R}$ *такие, что* $(x, y(x)) \notin \Gamma$ *при* $x \in (\alpha, r_-) \cup (r_+, \omega)$ *(иными словами, график непродолжаемого решения всегда выйдет за границы произвольного компакта).*

{нужен рисунок}

Как следствие можно заключить, что точки $(\alpha, y(\alpha))$ и $(\omega, y(\omega))$ не принадлежат множеству D.

С использованием этой теоремы доказывается следующая

Теорема о поведении в полосе. *Пусть*
$f \in \mathcal{C}(D)$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(D)$, $D = (a, b) \times \mathbb{R}$ *— вертикальная полоса,*
функция $y(x)$ *— непродолжаемое решение задачи Коши*(x_0, y_0), *определённое на* (α, ω),
тогда
I) либо $a = \alpha$, *либо* $a < \alpha$, *и тогда* $|y(x)| \to +\infty$ *при* $x \to \alpha + 0$;
II) либо $b = \omega$, *либо* $b > \omega$, *и тогда* $|y(x)| \to +\infty$ *при* $x \to \omega - 0$.
Докажем II.

Надо показать, что если $b \geqslant \omega$, тогда $|y(x)| \to +\infty$ при $x \to \omega - 0$. Используем для этого теорему о покидании компакта. Рассмотрим семейство компактов $\Gamma_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in \left[x_0, \frac{\omega+d}{2}\right], |y| \leqslant R\right\}$. По теореме о покидании компакта существует $r_-(R) \in \mathbb{R}$, при котором $(x, y(x)) \notin \Gamma$ при $x \in (r_+(R), \omega)$. Поскольку $\omega < \frac{\omega+d}{2}$, значит, $|y(r_+(R))| > R$, $|y(x)| > R$ при $x \in (r_+(R), \omega)$. Увеличивая R, получаем $|y(x)| \to +\infty$ при $x \to \omega - 0$. Пункт I доказывается аналогично.

ЧТД

Замечание к теореме о поведении в полосе. Выражение $|y(x)| \to +\infty$ при $x \to \omega - 0$ означает
либо $y(x) \to +\infty$ при $x \to \omega - 0$,
либо $y(x) \to -\infty$ при $x \to \omega - 0$. Так, если для некоторого $R > 0$ $y(r_+(R)) > R$, то по теореме о покидании компакта $|y(x)| > R$ при $x \in (r_+(R), \omega)$. Если найдётся x_1 при котором $y(x_1) < -R$, то из непрерывности функции y найдётся точка x_2, для которой $y(x_2) = 0$. Получили противоречие. Значит, $y(x) > R$ при всех $x \in (r_+(R), \omega)$.

§12. Методы понижения порядка

Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{5}$$

где $y = y(x)$, $G : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{(n+2)}$. Рассмотрим несколько методов, позволяющих понизить порядок этого уравнения.

I. Функция G не зависит от $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$:

$$G\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

В этом случае можно сделать замену

$$z(x) = y^{(k)}(x),$$

тогда уравнение (5) станет порядка $n-k$:

$$G\left(x, z, z', \ldots, \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

II. Группировка.
Этот вариант подходит, когда уравнение (5) можно привести к виду

$$\frac{d}{dx} H\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

порядок уменьшается на 1:

$$H\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C.$$

III. Функция G однородная по y,
т.е. для любого ненулевого λ имеет место равенство

$$G\left(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}\right) = \lambda^{\delta} G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$$

для некоторого числа δ.

Так, если взять $\lambda = \dfrac{1}{y}$, то (5) можно записать в виде

$$G\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \tag{$*$}$$

Можно предположить, что замена

$$z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

приведёт к нужному результату. Действительно, имеем

$$y'(x) = y(x)z(x),$$

$$y'' = y'z + yz',$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{y'}{y}z + z',$$

$$\frac{y''}{y} = z^2 + z'.$$

По индукции покажем, что

$$\frac{y^{(k)}}{y} = \Phi_k\left(z, z', \dots, z^{(k-1)}\right).$$

Для $k = 1, 2$ это вывели выше, пусть для $k = i$ справедливо

$$\frac{y^{(i)}}{y} = \Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right),$$

тогда

$$y^{(i+1)} = \frac{d}{dx} y^{(i)} = \left\{ \text{по предположению индукции} \right\} = \frac{d}{dx}\left(y\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right)\right) =$$

$$y'\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right) + y\frac{d}{dx}\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right) = y'\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right) + y\widetilde{\Phi}_{i+1}\left(z, z', \dots, z^{(i)}\right),$$

получаем

$$\frac{y^{(i)}}{y} = \frac{y'}{y}\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right) + \widetilde{\Phi}_{i+1}\left(z, z', \dots, z^{(i)}\right) =$$
$$z\Phi_i\left(z, z', \dots, z^{(i-1)}\right) + \widetilde{\Phi}_{i+1}\left(z, z', \dots, z^{(i)}\right) = \Phi_{i+1}\left(z, z', \dots, z^{(i)}\right).$$

В результате, (*) при такой замене станет

$$G\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \Phi_n\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0,$$

это можно переобозначить

$$W\left(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}\right) = 0,$$

получили уравнение на порядок ниже.

IV. Функция G не зависит от x в явном виде.

В случае, если уравнение (5) имеет вид

$$G\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

можно сделать замену

$$y' = p(y),$$

тогда

$$y''(x) = (p(y(x)))'_x = p'_y(y(x))y'_x(x) = p'p.$$

По индукции покажем, что

$$y^{(k)} = \Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right).$$

Для $k = 1, 2$ это вывели выше, пусть для $k = i$ справедливо

$$y^{(i)} = \Phi_i\left(p, p', \dots, p^{(i-1)}\right),$$

тогда

$$y^{(i+1)(x)} = \frac{dy^{(i)}(x)}{dx} = \left\{ \text{ по предположению индукции } \right\} = \frac{d}{dx}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)\frac{dp(y(x))}{dx} + \frac{\partial}{\partial p'}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)\frac{dp'(y(x))}{dx} + \dots +$$
$$\frac{\partial}{\partial p^{(k-1)}}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)\frac{dp^{(k-1)}(y(x))}{dx} = \frac{\partial}{\partial p}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)p'p +$$
$$\frac{\partial}{\partial p'}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)p''p + \dots + \frac{\partial}{\partial p^{(k-1)}}\Phi_k\left(p, p', \dots, p^{(k-1)}\right)p^{(k)}p = \Phi_{i+1}\left(p, p', \dots, p^{(i)}\right).$$

В результате, (5) при такой замене станет

$$G\left(y, p, pp', \dots, \Phi_n\left(p, p', \dots, p^{(n-1)}\right)\right) = 0,$$

это можно переобозначить

$$W\left(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}\right) = 0,$$

получили уравнение на порядок ниже.

V. Замена Эйлера.

В случае, если уравнение (5) имеет вид

$$G\left(y, xy', x^2y'', \dots, x^n y^{(n)}\right) = 0,$$

заменим перменную x на новую $t : x = \varphi(t)$, тогда $y(x) = y(\varphi(t))$, это можно обозначить через новую функцию $u(t)$:

$$y(x) = y(\varphi(t)) = u(t) = u(t(x)).$$

Попробуем взять такую функцию φ, чтобы можно было заменить xy' на u', для этого распишем:

$$xy'(x) = \varphi(t)\frac{dy(x)}{dx},$$
$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{dy(\varphi(t))}{dt} = \frac{dy(\varphi)}{d\varphi}\frac{\varphi(t)}{dt} = \frac{dy(x)}{dx}\frac{\varphi(t)}{dt},$$

значит, надо подобрать функцию φ так, чтобы $\varphi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{dt}$. Все решения этого уравнения записываются как $\varphi(t) = Ce^t$, поэтому можно выбрать следующую замену:
если $x > 0$, то $x = e^t$,
если $x < 0$, то $x = -e^t$.
Рассмотрим первый случай, $x > 0$, замена $x = e^t$, $t = lnx$, тогда

$$y(x) = y(\varphi(t)) = u(t) = u(lnx).$$

$$xy'(x) = x\frac{du(t(x))}{dx} = x\frac{du(t)}{dt}\frac{dlnx}{dx} = x\frac{du(t)}{dt}\frac{1}{x} = u'(t) = \frac{d}{dt}u,$$

$$x^2y''(x) = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{u'(t(x))}{x}\right) = x^2\frac{u''(t)t'(x)x - u'(t)}{x^2} =$$

$$u''(t) - u'(t) = \frac{d}{dt}(u' - u) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)u.$$

По индукции покажем, что

$$x^k y^{(k)} = \Phi_k\left(u, u', \ldots, u^{(k)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - k + 1\right)u.$$

Для $k = 1, 2$ это вывели выше, пусть для $k = i$ справедливо

$$x^i y^{(i)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - i + 1\right)u,$$

тогда

$$x^{i+1}y^{(i+1)}(x) = \left\{ \text{ по предположению индукции } \right\} =$$

$$x^{i+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt}-i+1\right)u}{x^i}\right) =$$

$$x^{i+1}\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt}-i+1\right)u'(t)t'(x)x^i - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt}-i+1\right)uix^{i-1}}{x^{2i}} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - i + 1\right)u'(t) - i\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - i + 1\right)u =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - i + 1\right)(u' - iu) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\ldots\left(\frac{d}{dt} - i + 1\right)\left(\frac{d}{dt} - i\right)u = \Phi_{i+1}\left(u, u', \ldots, u^{(i+1)}\right).$$

Доказали шаг индукции.

В результате, (5) при такой замене станет

$$G\left(u, u', u'' - u', \ldots, \Phi_n\left(u, u', \ldots, u^{(n)}\right)\right) = 0,$$

это можно переобозначить

$$W\left(u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = 0,$$

получили уравнение вида IV.

VI. Функция G обобщённо-однородная,
т.е. для любого ненулевого λ имеет место равенство

$$G\left(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1}y', \lambda^{\alpha-2}y'', \ldots, \lambda^{\alpha-n}y^{(n)}\right) = \lambda^\delta G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$$

для некоторого числа δ.

Так, если взять $\lambda = \dfrac{1}{x}$, то (5) можно записать в виде

$$G\left(1, \frac{y}{x^{\alpha}}, \frac{y'}{x^{\alpha-1}}, \frac{y''}{x^{\alpha-2}}, \dots, \frac{y^{(n)}}{x^{\alpha-n}}\right) = 0. \qquad (**)$$

Можно предположить, что замена

$$z(x) = \frac{y(x)}{x^{\alpha}}$$

приведёт к нужному результату. Действительно, имеем

$$y(x) = x^{\alpha} z(x),$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} z',$$

$$\frac{y'}{x^{\alpha-1}} = \alpha z + x z'.$$

По индукции покажем, что

$$\frac{y^{(k)}}{x^{\alpha-k}} = \Phi_k\left(z, xz', \dots, x^k z^{(k)}\right).$$

Для $k = 1$ это вывели выше, пусть для $k = i$ справедливо

$$\frac{y^{(i)}}{x^{\alpha-i}} = \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right),$$

тогда

$$\frac{y^{(i+1)}}{x^{\alpha-i-1}} = \frac{1}{x^{\alpha-i-1}} \frac{d}{dx} y^{(i)} = \left\{ \text{ по предположению индукции } \right\} =$$

$$\frac{1}{x^{\alpha-i-1}} \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha-i} \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{x^{\alpha-i-1}}\left((\alpha-1) x^{\alpha-i-1} \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) + x^{\alpha-i} \frac{d}{dx} \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right)\right) =$$

$$(\alpha-1) \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) + x \frac{d}{dx} \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) =$$

$$(\alpha-1) \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) + x\left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi_i \frac{d}{dx} z + \frac{\partial}{\partial (xz')} \Phi_i \frac{d}{dx}(xz') + \dots + \frac{\partial}{\partial (x^i z^{(i)})} \Phi_i \frac{d}{dx}(x^i z^{(i)})\right) =$$

$$(\alpha-1) \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) + x\left(\widetilde{\Phi}_i^1 z' + \widetilde{\Phi}_i^2 (z' + xz'') + \dots + \widetilde{\Phi}_i^i (i x^{i-1} z^{(i)} + x^i z^{(i+1)})\right) =$$

$$(\alpha-1) \Phi_i\left(z, xz', \dots, x^i z^{(i)}\right) + \widetilde{\Phi}_{i+1}^1\left(z, xz', \dots, x^{i+1} z^{(i+1)}\right) + \widetilde{\Phi}_{i+1}^2\left(z, xz', \dots, x^{i+1} z^{(i+1)}\right) + \dots$$
$$+ \widetilde{\Phi}_{i+1}^i\left(z, xz', \dots, x^{i+1} z^{(i+1)}\right) = \Phi_{i+1}\left(z, xz', \dots, x^{i+1} z^{(i+1)}\right).$$

Доказали шаг индукции. В результате, (**) при такой замене станет

$$G\left(1, z, \alpha z + xz', \dots, \Phi_n\left(z, xz', \dots, x^n z^{(n)}\right)\right) = 0,$$

это можно переобозначить

$$W\left(z, xz', \dots, x^n z^{(n)}\right) = 0,$$

получили уравнение вида V.

Пример. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} x^4y'' - xyy' + 2y^2 - 2x^2y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 4,5. \end{cases}$$

Это дифференциальное уравнение обобщённо-однородное, действительно,

$$(\lambda x)^4(\lambda^{\alpha-2}y'') - (\lambda x)(\lambda^\alpha y)(\lambda^{\alpha-1}y') + 2(\lambda^\alpha y)^2 - 2(\lambda x)^2(\lambda^\alpha y) =$$

$$\lambda^{\alpha+2}x^4y'' - \lambda^{2\alpha}xyy' + \lambda^{2\alpha}2y^2 - \lambda^{\alpha+2}2x^2y = \lambda^\delta(x^4y'' - xyy' + 2y^2 - 2x^2y)$$

при $\lambda = 2$ и $\delta = 4$. Значит, проделав замену $z(x) = \dfrac{y(x)}{x^\alpha}$, мы получим уравнение типа V.

Замена 1. $z(x) = \frac{y(x)}{x^2}$,
тогда

$$y(x) = x^2z(x),$$

$$y'(x) = 2xz(x) + x^2z'(x),$$

$$y''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x),$$

при этом из начальных данных

$$z(1) = \frac{y(1)}{1^2} = 2,$$

$$z'(1) = \frac{y'(x) - 2xz(x)}{x^2}\Bigg|_{x=1} = y'(1) - 2z(1) = 4,5 - 2\cdot 2 = 0,5,$$

тогда наше дифференциальное уравнение перепишется в виде

$$x^4(2z + 4xz' + x^2z'') - x(x^2z)(2xz + x^2z') + 2(x^2z)^2 - 2x^2(x^2z) = 0,$$

после приведения подобных слагаемых

$$x^2z'' + 4xz' - z\cdot xz' = 0,$$

учитывая начальные условия, получим новую задачу Коши

$$\begin{cases} x^2z'' + 4xz' - z\cdot xz' = 0, \\ z(1) = 2, \\ z'(1) = 0,5. \end{cases}$$

Это дифференциальное уравнение типа V, проведём здесь замену, приводящую к уравнению вида IV.

Замена 2. $x = e^t$
(здесь мы можем выбрать из двух замен $x = e^t$, если $x > 0$, и $x = -e^t$, если $x < 0$, первую, поскольку задача Коши задана в точке $x = 1$, это входит именно в случай $x > 0$)
тогда

$$z(x) = z(e^t) = u(t) = u(lnx),$$

и, как мы уже высчитывали,

$$xz' = u',\ x^2z'' = u'' - u',$$

и из начальных данных

$$2 = z(1) = u(ln1) = u(0),$$

$$u'(lnx)\Big|_{x=1} = xz'(x)\Big|_{x=1} = 0,5,$$

а дифференциальное уравнение перепишется в виде

$$(u'' - u') + 4u' - u \cdot u' = 0,$$

учитывая начальные условия, получим новую задачу Коши

$$\begin{cases} u'' + 3u' - uu' = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0,5. \end{cases}$$

Новое дифференциальное уравнение типа IV, оно не зависит в явном виде от переменной t.

Замена 3. $p(u) = u'$
Как мы уже вычисляли, $u'' = p'p$, а из начальных условий $p(2) = 0,5$, дифференциальное уравнение перепишется в виде $pp' + 3p - up = 0$, задача Коши получится следующей

$$\begin{cases} pp' + 3p - up = 0, \\ p(2) = 0,5. \end{cases}$$

Решим её. Поскольку $p(u) = 0$ является решением дифференциального уравнения, но не удовлетворяет начальному условию, то можем поделить на p. Получим $p' = u - 3$ — уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение

$$p(u) = \frac{u^2}{2} - 3u + C_0,$$

используя начальное условие $0,5 = 2 - 6 + C_0$, $C_0 = 4,5$, решение задачи Коши

$$p(u) = \frac{u^2}{2} - 3u + 4,5 = \frac{u^2 - 6u + 9}{2} = \frac{(u-3)^2}{2}.$$

Теперь проводим обратные замены.
Из замены 3

$$u'(t) = \frac{(u-3)^2}{2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, где $u(t) = 3$ является решением уравнения, но не удовлетворяет начальным данным $u(0) = 2$, $u'(0) = 0,5$, поэтому можно делить на $u - 3$:

$$\int \frac{du}{(u-3)^2} = \int \frac{dt}{2},$$

$$\frac{-1}{(u-3)} = \frac{t}{2} + C_1.$$

Используя начальное условие $u(0) = 2$, получим $\frac{-1}{(2-3)} = \dfrac{0}{2} + C_1$, $C_1 = 1$, тогда

$$u(t) = 3 - \frac{2}{t+2} = \frac{3t+4}{t+2}.$$

Из замены 2

$$z(x) = \frac{3lnx + 4}{lnx + 2}.$$

Из замены 1

$$\frac{y(x)}{x^2} = \frac{3lnx + 4}{lnx + 2}.$$

Получаем ответ исходной задачи Коши:

$$y(x) = x^2 \frac{3lnx + 4}{lnx + 2}.$$

ГЛАВА II. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общая теория: Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 16–22

Общая теория линейных систем: Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 25–30

Линейные системы д.у. с постоянными коэффициентами Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 37–39

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Уравнения высших порядков. Сведение к системе Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 22–23

Линейное уравнение n-го порядка: Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 30–32

Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами Коробков М.В. Лекции по дифференциальным уравнениям. Семестр I. Стр. 34–37

ГЛАВА IV. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Общая теория краевых задач: Чересиз В.М. Лекции по дифференциальным уравнениям. Стр. 1–6

Задача Штурма-Лиувилля: Чесресиз В.М. Лекции по дифференциальным уравнениям. Стр. 6–8, 11–14