Вариант 1

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/3} \left((y')^2 - 9y^2 + \frac{18y}{1+\cos^2(3x)} \right) dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + x_2 = 0, \\ 17\ddot{x}_2 + x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 100y = \cos(7\omega t) + 4$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-16t}y^2 + \mu^2 \ln(1 + x^2 + y^2), & x\big|_{t=0} = \mu, \\ \dot{y} = 8y + e^{8t} + 5\mu x e^{8t}, & y\big|_{t=0} = 5\mu^2. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 2

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_{3\pi}^{9\pi} \left((y')^2 - \frac{y^2}{36} + \frac{y}{9(1+\sin^2(x/6))} \right) dx, \quad y(3\pi) = 0, \quad y(9\pi) = \pi.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 13\ddot{x}_1 + 13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2x_1 + x_2 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 16\omega^2 y = \cos(5t) + 11$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4te^{2t}y^2 + \mu^2 \sin y, & x\big|_{t=0} = 4\mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-2t} + \mu^2 \sin x, & y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/5} \left((y')^2 - 25y^2 + \frac{100y}{1+\cos^2(5x)} \right) dx, \quad y(0) = \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2\ddot{x}_3 + x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 81y = \cos(5\omega t) + 5$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-14t}y^2 + \mu^2 \sin(x+y), & x\big|_{t=0} = 2\mu, \\ \dot{y} = 7y + e^{7t} + 5\mu x e^{7t}, & y\big|_{t=0} = 3\mu^2. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 4

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_{2\pi}^{6\pi} \left((y')^2 - \frac{y^2}{16} + \frac{y}{16(1+\sin^2(x/4))} \right) dx, \quad y(2\pi) = 0, \quad y(6\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_2 = 0, \\ 5\ddot{x}_2 + 3x_1 + 25x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 64\omega^2 y = \cos(9t) + 1$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4te^{3t}y^2 + \mu^2 \ln(1+y^2), & x\big|_{t=0} = 5\mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-3t} + \mu^2 e^x, & y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/7} \left((y')^2 - 49y^2 + \frac{14y}{1+\cos^2(7x)} \right) dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{14}, \quad y\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 17\ddot{x}_1 + 17x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_1 + x_2 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 121y = \cos(3\omega t) + 6$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-12t}y^2 + \mu^2 \operatorname{arctg}(ty), & x\big|_{t=0} = 3\mu, \\ \dot{y} = 6y + e^{6t} + 5\mu x e^{6t}, & y\big|_{t=0} = \mu^2. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 6

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_{5\pi}^{15\pi} \left((y')^2 - \frac{y^2}{100} + \frac{y}{25(1+\sin^2(x/10))} \right) dx, \quad y(5\pi) = 0, \quad y(15\pi) = \pi.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5\ddot{x}_3 + 3x_1 + 4x_2 + 25x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 100\omega^2 y = \cos(3t) + 5$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4te^{4t}y^2 + \mu^2 \operatorname{arctg} y, & x\big|_{t=0} = \mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-4t} + \mu^2(x^2+y^2), & y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/6} \left((y')^2 - 36y^2 + \frac{36y}{1+\cos^2(6x)} \right) dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_2 = 0, \\ 13\ddot{x}_2 + 3x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 64y = \cos(9\omega t) + 2$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-10t}y^2 + \mu^2 e^{x+y}, & x\big|_{t=0} = 2\mu, \\ \dot{y} = 5y + e^{5t} + 5\mu x e^{5t}, & y\big|_{t=0} = 2\mu^2. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 8

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_\pi^{3\pi} \left((y')^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{10y}{1+\sin^2(x/2)} \right) dx, \quad y(\pi) = 0, \quad y(3\pi) = 10\pi.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 5\ddot{x}_1 + 25x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 3x_1 + x_2 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 25\omega^2 y = \cos(8t) + 2$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4te^{6t}y^2 + \mu^2 \sin(x+y), & x\big|_{t=0} = 3\mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-6t} + \mu^2 \cos(x-y), & y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left((y')^2 - 16y^2 + \frac{64y}{1+\cos^2(4x)} \right) dx, \quad y(0) = \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + x_3 = 0, \\ 17\ddot{x}_3 + 4x_1 + x_2 + 17x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 49y = \cos(6\omega t) + 10$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-8t}y^2 + \mu^2(\sin x + \cos y), & x\big|_{t=0} = 4\mu, \\ \dot{y} = 4y + e^{4t} + 5\mu x e^{4t}, & y\big|_{t=0} = 5\mu^2. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 10

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_{4\pi}^{12\pi} \left((y')^2 - \frac{y^2}{64} + \frac{y}{32(1+\sin^2(x/8))} \right) dx, \quad y(4\pi) = 0, \quad y(12\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2\ddot{x}_2 + 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 4\omega^2 y = \cos(9t) + 20$.

а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.

б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?

в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t+T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 4te^{7t}y^2 + \mu^2 e^{y}, & x\big|_{t=0} = 3\mu, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x e^{-7t} + \mu^2 e^{x}, & y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$