Вариант 1

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(e^{2t} y y' + e^{2t} (y')^2 + \frac{2e^t y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-1}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ -3 & 15 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 8$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (2n)^2 y = \sin 16t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} t y'' = 6y' + \mu \left(2t^7 y^2 + (y')^4 - \sin^2(y') \right), \\ y\big|_{t=1} = 2 + 5\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 15\mu. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 2

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^{4t} y y' + e^{4t} (y')^2 + \frac{2e^{2t} y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-2}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -3 \\ -2 & 20 & -6 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \sin(t\sqrt{3}) \\ -\sin(t\sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 12$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (5n)^2 y = \cos 25t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} t y'' = 5y' + \mu \left(9t^8 (2 + y^2) + (y')^3 + (y')^5 \right), \\ y\big|_{t=1} = 1 + 3\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 15\mu. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(e^{-2t}(y')^2 - e^{-2t}yy' + \frac{2e^{-t}y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 27 & -5 & -1 \\ -5 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 13 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 5\sin(t\sqrt{13}) \\ -\sin(t\sqrt{13}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 14$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (3n)^2 y = \sin 12t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 4y' + \mu\left(2t^6(3+y^2) + (y')^3 + \sin^3(y')\right), \\ y\big|_{t=1} = 2 + 7\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 12\mu. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 4

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(e^{-4t}(y')^2 - 2e^{-4t}yy' + \frac{2e^{-2t}y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^2\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 15 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t\sqrt{5}) \\ -\sin(t\sqrt{5}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 8$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (4n)^2 y = \cos 8t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 3y' + \mu\left(3t^6(8-y^2) + \sin(y') + \sin(2y')\right), \\ y\big|_{t=1} = 1 + 4\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 11\mu. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(e^{6t}(y')^2 + 3e^{6t}yy' + \frac{2e^{3t}y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-3}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 30 & -9 \\ -3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 13$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (10n)^2 y = \sin 100t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 2y' + \mu\left(9t^5(6 - y^2) + (y')^3 - (y')^4\right), \\ y\big|_{t=1} = 2 + 3\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 9\mu. \end{cases}$$

. . . .

Вариант 6

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^{-2t}yy' + e^{-2t}(y')^2 - 3e^{-2t}(y)^2 + \frac{2e^{-t}y}{1+t^2} \right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 15 & -1 & -7 \\ -1 & 15 & -7 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 8$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (6n)^2 y = \cos 30t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 6y' + \mu\left(9t^8(1 + y^4) + \sin(y')\right), \\ y\big|_{t=1} = 1 - 5\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 16\mu. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^{-4t}yy' + e^{-4t}(y')^2 - 8e^{-4t}(y)^2 + \frac{2e^{-2t}y}{1+t^2}\right)dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^2\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & -6 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(t\sqrt{10}) \\ -\sin(t\sqrt{10}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 12$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (7n)^2 y = \sin 21t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 5y' + \mu\left(t^7y^4 - (y')^5 - (y')^7\right), \\ y\big|_{t=1} = 2 - 10\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 14\mu. \end{cases}$$

....

Вариант 8

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^{6t}yy' + e^{6t}(y')^2 - 3e^{6t}(y)^2 + \frac{2e^{3t}y}{1+t^2}\right)dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-3}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -8 \\ -4 & -8 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t\sqrt{5}) \\ -\sin(t\sqrt{5}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 9$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (8n)^2 y = \cos 24t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 4y' + \mu\left(3t^5(1 + y^3) + (y')^2 + \sin^4(y')\right), \\ y\big|_{t=1} = 1 - 2\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 11\mu. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(2e^{2t}yy' + e^{2t}(y')^2 + e^{2t}(y)^2 + \frac{2e^t y}{1+t^2}\right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-1}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} \sin(t\sqrt{3}) \\ -\sin(t\sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 7$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (9n)^2 y = \sin 36t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 3y' + \mu\left(12t^5(5 - y^2) + \sin(y') + (y')^2\right), \\ y\big|_{t=1} = 2 - 4\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 10\mu. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int\limits_0^1 \left(e^{4t}(y')^2 - 4e^{4t}(y)^2 + \frac{2e^{2t} y}{1+t^2}\right) dt, \quad y(0) = \frac{1}{2}\ln 2, \quad y(1) = \frac{e^{-2}\pi}{4}.$$

2. Найти общее решение системы $M\ddot{X} + KX = F(t)$, где

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 15 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -9 \\ -3 & -9 & 15 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(t\sqrt{5}) \\ -\sin(t\sqrt{5}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Указание. Корни уравнения $\det(K - \omega^2 M) = 0$ имеют вид: $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = \omega_3^2 = 8$.

3. Дано дифференциальное уравнение $\ddot{y} + (5n)^2 y = \cos 20t$.

а) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать данное решение.

б) При каких $n \in \mathbb{N}$ не существует периодических решений с периодом, равным периоду правой части?

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много периодических решений с периодом, равным периоду правой части? Выписать эти решения.

4. Найти производную по параметру $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ от решения задачи Коши

$$\begin{cases} ty'' = 2y' + \mu\left(7t^6(3 + y^3) + \sin(y') - \sin(2y')\right), \\ y\big|_{t=1} = 1 - 3\mu, \quad y'\big|_{t=1} = 10\mu. \end{cases}$$