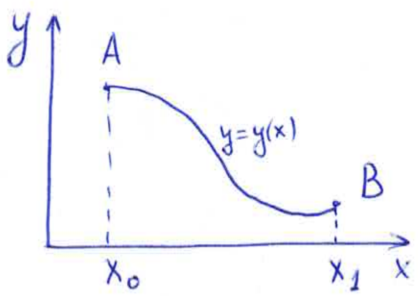
Лекция 1 (4 февраля 2020г.)

Глава I. Вариационное исчисление

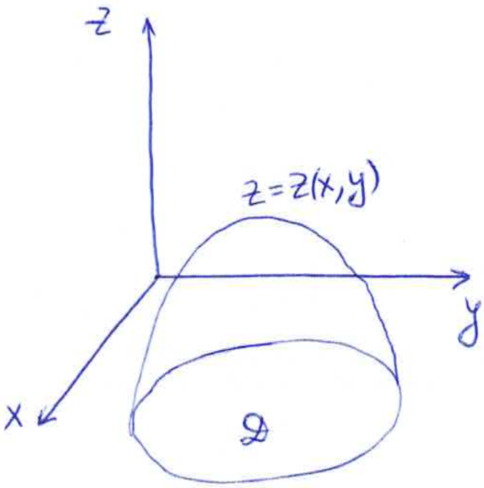
Александров В.А., Егоров А.А. Вариационное исчисление.

Функция: число → число

Функционал: функция → число



$$L[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$



$$S[z] = \iint_{D} \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dx\,dy$$

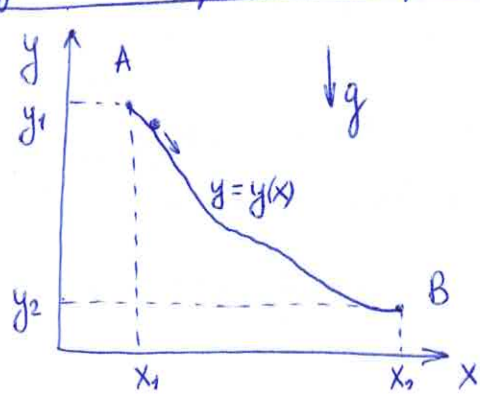
Опр.

Вариационная задача — задача исследования функционала на минимум, либо максимум.

Вариационное исчисление — методы решения вариационных задач.

Задача о кривой наискорейшего спуска

(задача о брахистохроне)



$$T = \int_0^T dt$$

а) $$mgh_A + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_y + \frac{mv_y^2}{2}$$

$$gy_1 = gy(x) + \frac{v_y^2}{2}$$

б) $$v_y = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dt} = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\frac{dx}{dt}$$

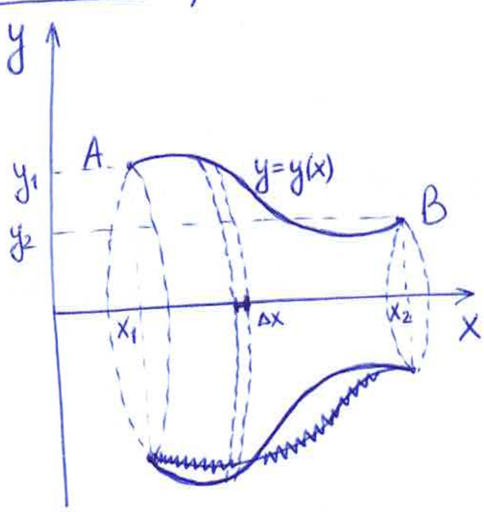
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}$$

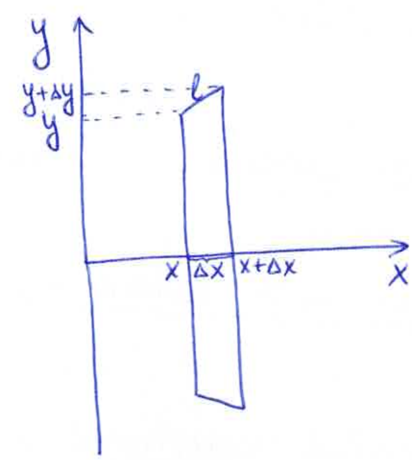
$$\Rightarrow \sqrt{2g(y_1-y(x))} = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\frac{dx}{dt}$$

$$dt = \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2g(y_1-y(x))}}\,dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2g(y_1-y(x))}}\,dx \longrightarrow \min \\ y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2 \end{cases}$$

Задача о поверхности вращения наименьшей площади



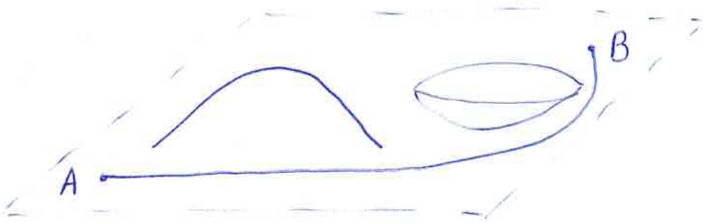


$$\Delta S = \pi(y+y+\Delta y)l = \pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$dS = 2y\pi\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$\begin{cases} S[y] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \longrightarrow \min \\ y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2 \end{cases}$$

Задача о геодезических



$G(x,y,z)=0$ ур-ие поверхности

$(x(t),y(t),z(t))$ - кривая

$$\begin{cases} L[x,y,z]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt\to\min \\ G(x,y,z)=0 \\ (x,y,z)\big|_{t=t_1}=A \\ (x,y,z)\big|_{t=t_2}=B \end{cases}$$

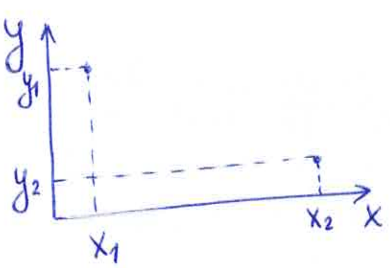
§2. Простейшая задача вариационного исчисления

$$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))\,dx \qquad (1)$$

$F:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, Ω - откр. мн-во, $F\in C^2(\Omega)$

$y=y(x)$

$y:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$



$y(x_1)=y_1$

$y(x_2)=y_2$

$y\in C^2[x_1,x_2]$

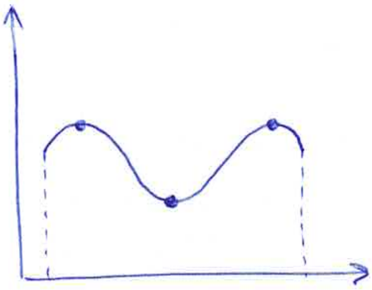
$(x,y(x),y'(x))\in\Omega \quad \forall x\in[x_1,x_2]$

$\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))dx$ сходится

условие (*)

Опр.
Функции $y(x)$, удовл. условиям (*), наз. <u>допустимыми</u>.
Мн-во этих ф-ий обозначим через M:

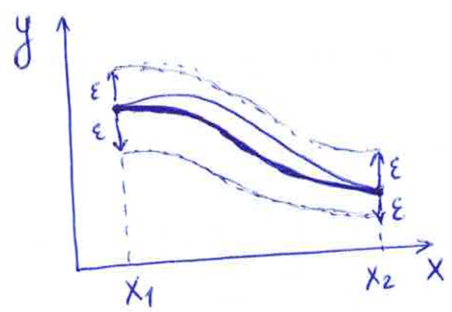
$M=\{y(x):\ y(x)$ удовл. условиям $(*)\}$.



Опр.

Функция $y^*(x) \in M$ доставляет ~~лок.~~ глобальный минимум функционалу $I[y]$, если $\forall y \in M$ $I[y] \geq I[y^*]$.

Функция $y^*(x) \in M$ доставляет локальный минимум функционалу $I[y$ если $\exists \varepsilon > 0$ $\forall y \in M$: $\sup\limits_{x \in [x_1, x_2]} |y^*(x) - y(x)| < \varepsilon \Rightarrow I[y] \geq I[y^*]$



Опр. Глобальный и локальный максимум — аналогично.

Опр. Ф-ия, доставляющая минимум либо максимум, доставляет экстремум.

$f(x)$. $x = x^*$ доставляет экстремум ф-ии $f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx}\Big|_{x=x^*} = 0$.

(это необходимое условие).

Необходимое условие локального экстремума

Если $y(x) \in M$ доставляет локальный экстремум, то $y(x)$ удовлетворяет диф. уравнению

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$ ~~условие~~ уравнение Эйлера

Опр. Решение $y(x) \in M$ уравнения Эйлера — экстремали.

§3. Случаи понижение порядка в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0$$

Пример

$$\begin{cases} I[y] = \int_1^e \left(yy' + x(y')^2\right) dx \\ y(1) = 0, \quad y(e) = 1 \end{cases}$$

$$F(x,y,y') = yy' + x(y')^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y', \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = y + 2xy', \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = y' + 2y' + 2xy'' = 3y' + 2xy''$$

$$\Rightarrow y' - (3y' + 2xy'') = 0, \quad \begin{cases} xy'' + y' = 0 \\ y(1) = 0, \quad y(e) = 1 \end{cases}$$

$y' = \frac{C_1}{x}$ $\quad y(x) = C_1 \ln|x| + C_2 \quad \Rightarrow y(x) = \ln x$ – экстремаль

I. $F = F(x,y) \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$ – не диф. ур-ие

II. $F = F(x,y') \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = C$

III. $F = F(y,y')$

$$\frac{\partial F(y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = 0$$

1 вариант. Замена $y' = p(y)$

2 вариант.

Умножим на y': $\quad y'\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, $\quad y' = 0$ – проверить

$$\underbrace{y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'}}_{\frac{d}{dx}F(y,y')} - \underbrace{\left(y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}(y,y')\right)} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad \text{ур-ие 1-го порядка} \\ y = \text{const} \ ? \end{array}\right.$$

Лекция 2 (11 февраля 2020 г.)

$$\begin{cases} I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to extr \\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \qquad y = y(x) - ?$$

$F : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω - откр. мн-во, $F \in C^2(\Omega)$

$y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$

$y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

$\underline{y \in C^2([x_1, x_2])}$, $F(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))\,dx$ сходится

$y \in C^2((x_1, x_2)) \cap C([x_1, x_2])$

} $y(x)$ - допустимая

$y \in M$

M - мн-во допустимых функций

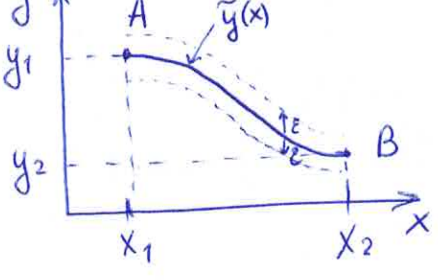
§4. Вывод необходимого условия локального экстремума

Покажем, что если $\tilde{y}(x) \in M$ доставляет лок. экстремум ф-лу $I[y]$, то $\tilde{y}(x)$ удовл. уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y') = 0 \qquad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Пусть $\tilde{y}(x)$ доставляет лок. минимум.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall y(x) \in M$: $\sup\limits_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon \Rightarrow I[y] \geq I[\tilde{y}]$



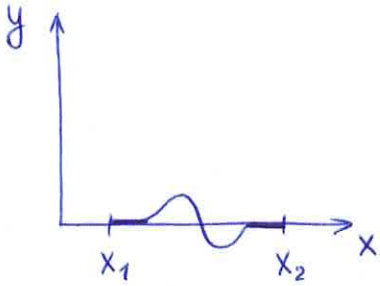
$f(x)$. Необх. усл. лок. экстремума $\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x^*} = 0$.

Возьмем $y(x)$ в виде $y(x) = \tilde{y}(x) + \alpha\,\xi(x)$

$\xi(x)$ - произвольная финитная функция

$\eta \in C_0^2([x_1, x_2])$, т.е. (1) $\eta \in C^2([x_1, x_2])$

(2) $\eta \in C_0([x_1, x_2])$



$\exists \delta : \eta(x) = 0$ при $x \in [x_1, x_1+\delta]$ и $x \in [x_2-\delta, x_2]$.

$\alpha \in \mathbb{R}$: $y(x) = \tilde{y}(x) + \alpha \eta(x) \in M$, $\alpha \in [-\alpha_1, \alpha_1]$.

Тогда $I[\underset{\text{фикс.}}{\tilde{y}} + \alpha \underset{\text{фикс.}}{\eta}] \geqslant I[\tilde{y}]$

Обозначим $g(\alpha) = I[\tilde{y} + \alpha\eta] \Rightarrow g(\alpha) \geqslant g(0)$ для $\alpha \in [-\alpha_1, \alpha_1]$,

т.е. $\alpha = 0$ – лок. минимум функции $g(\alpha)$.

$\Rightarrow$ вып. необх. условие лок. экстремума $\frac{d}{d\alpha} g(\alpha)\big|_{\alpha=0} = 0$

Имеем:

$$\frac{d}{d\alpha} g(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} I[\tilde{y} + \alpha\eta]\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}(x) + \alpha\eta(x), \tilde{y}'(x) + \alpha\eta'(x))\,dx\right)\Big|_{\alpha=0}$$

<u>Теорема</u>

Если $h(x,\alpha) : [x_1, x_2] \times [-\alpha_1, \alpha_1] \to \mathbb{R}$, h, $\frac{\partial h}{\partial \alpha}$ непр. на $[x_1, x_2] \times [-\alpha_1, \alpha_1]$,

тогда $\frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} h(x,\alpha)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} h(x,\alpha)\,dx$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} g(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x, \tilde{y} + \alpha\eta, \tilde{y}' + \alpha\eta')\,dx\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \left(\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y} + \alpha\eta, \tilde{y}' + \alpha\eta')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y} + \alpha\eta, \tilde{y}' + \alpha\eta')\eta'\right)dx\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\cdot\eta'\right)dx \underset{\text{по частям}}{=}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\cdot\eta\,dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\cdot\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0,\ \text{т.к. } \eta(x) \text{ – финитная}} - \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\right)\cdot\eta\,dx \ominus$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \right] \eta \, dx = 0$$

Лемма Лагранжа

Пусть $h(x) \in C([x_1, x_2])$ и для произв. финитной функции $\eta \in C_0^2([x_1, x_2])$ имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x)\eta(x) = 0.$$

Тогда $h(x) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$.

$\Rightarrow$ по лемме Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Таким образом, $\tilde{y}(x)$, доставляющая лок. минимум, является решением ур-ия

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

§5. Обозначения из аналитической механики

Если $y_1(x), y_2(x) \in M$, то $\delta y = y_1 - y_2$ — приращение аргумента

$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$ — вариационная производная ф-ла I

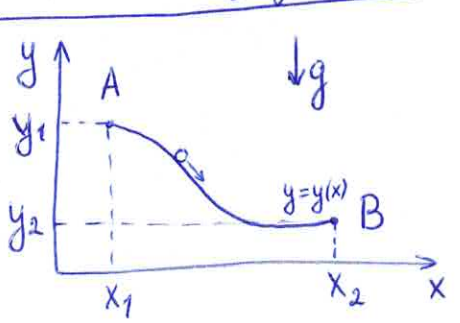
$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta I}{\delta y} \delta y \cdot dx$ — вариация функционала

Утв.

Функция $\tilde{y}(x)$ дост. лок. экстремум ф-лу I, тогда она удовл. ур-ию $\frac{\delta I}{\delta y} = 0$.

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \iff F_y = \frac{d}{dx}F_{y'}$$

§6. Решение задачи о брахистохроне



$$T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_1-y)}}\, dx \to \min$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

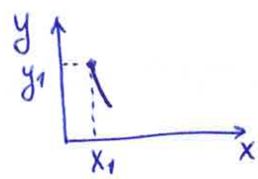
$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_1-y)}}$$

F независит от $x \Rightarrow F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = C$

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_1-y)}} - y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(y_1-y)}} = C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g(y_1-y)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \left[1+(y')^2 - (y')^2 \right] = C$$

$$(y_1-y)(1+(y')^2) = C_2 , \quad C_2 > 0$$



1) $y(x) < y_1 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$.

2) При $x \to x_1 \quad 1+(y'(x))^2 \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad y'(x) \underset{x\to x_1}{\longrightarrow} -\infty$

$$y' = -\sqrt{\frac{C_2}{y_1-y} - 1} \qquad y' = -\sqrt{\frac{C_2-y_1+y}{y_1-y}}$$

$$\int \sqrt{\frac{y_1-y}{C_2-y_1+y}}\, dy = -\int dx$$

Замена 1: $y(x) = a z(x) + b \qquad \dfrac{y_1-y}{C_2-y_1+y} = \dfrac{1-z}{1+z}$

$$y(x) = \frac{C_2}{2} z + y_1 - \frac{C_2}{2}$$

$$\frac{C_2}{2}\int \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\, dz = -x + C_3$$

Замена 2: $z(x) = \cos u(x)$

$$\frac{C_2}{2}\int \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \sin u \cdot du = x - C_3$$

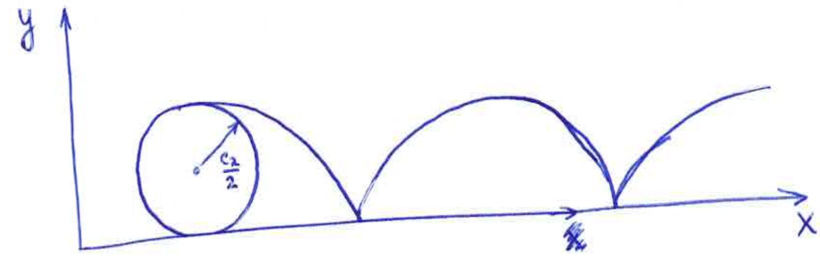
$$\frac{C_2}{2}\int \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}(1-\cos^2 u)}\, du = x - C_3$$

$$\frac{C_2}{2}\int (1-\cos u)\, du = x - C_3$$

$$\frac{C_2}{2}(u - \sin u) = x - C_3$$

$$\begin{cases} x = \frac{c_2}{2}u + c_3 - \frac{c_2}{2}\sin u \\ y = y_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{2}\cos u \end{cases}$$

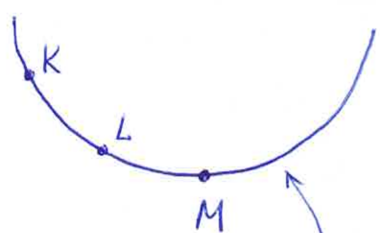
брахистохрона



циклоида

$$\begin{cases} x = \frac{c_2}{2}u + c_3 \\ y = y_1 - \frac{c_2}{2} \end{cases}$$ движение по прямой

$$\begin{cases} x = -\frac{c_2}{2}\sin u \\ y = \frac{c_2}{2}\cos u \end{cases}$$ движение по окружности



$T_{KM} = T_{LM}$

T_{KM} - время спуска из точки K в точку M

T_{LM} - время спуска из точки L в точку M.

§7. Вариационная задача с неск. неизв. функциями

$$\begin{cases} I[y,z] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',z,z')\,dx \to extr \\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \\ z(x_1) = z_1,\ z(x_2) = z_2 \end{cases}$$

Пусть $\tilde{y}(x), \tilde{z}(x)$ доставляют лок. экстремум, тогда они удовл. системе ур-ий:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0 \end{cases}$$

Лекция 3 (18 февраля 2020 г.)

§7. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями

$y(x), z(x)$ - ?

$$\begin{cases} I[y,z] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',z,z')\,dx \\ y(x_1)=y_1, \ y(x_2)=y_2 \\ z(x_1)=z_1, \ z(x_2)=z_2 \end{cases}$$

Если $\tilde{y}(x), \tilde{z}(x)$ доставляют лок. минимум.

Тогда для любых допустимых $y(x), z(x)$ таких, что $\exists\, \varepsilon > 0$:

$\sup\limits_{x\in[x_1,x_2]} |y(x)-\tilde{y}(x)| < \varepsilon$, $\sup\limits_{x\in[x_1,x_2]} |z(x)-\tilde{z}(x)| < \varepsilon \Rightarrow I[y,z] \geqslant I[\tilde{y},\tilde{z}]$

В частности,

$$I[y,\tilde{z}] \geqslant I[\tilde{y},\tilde{z}]$$

$$I[\tilde{y},z] \geqslant I[\tilde{y},\tilde{z}]$$

Обозначим $\begin{cases} I_1[y] = I[y,\tilde{z}] \\ I_2[z] = I[\tilde{y},z] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1[y] \geqslant I_1[\tilde{y}] \\ I_2[z] \geqslant I_2[\tilde{z}] \end{cases}$

Тогда $\tilde{y}$ дост. лок. минимум ф-лу $I_1[y]$,

$\tilde{z}$ дост. лок. минимум ф-лу $I_2[z]$.

$\Rightarrow$ вып. необх. усл. лок. экстремума: $\tilde{y}, \tilde{z}$ - реш. сист. ур. Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z'} = 0 \end{cases}$$

§8. Вариационная задача с высшими производными

$y = y(x)$ - ?

$$\begin{cases} I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'',\dots,y^{(k)})\,dx \\ y(x_1)=y_1, \ y(x_2)=y_2 \\ y'(x_1)=y_1', \ y'(x_2)=y_2' \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_1)=y_1^{(k-1)}, \ y^{(k-1)}(x_2)=y_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$y_1, y_1', \dots, y_1^{(k-1)}$ - числа

$y_2, y_2', \dots, y_2^{(k-1)}$ - числа

Необходимое условие

Если $\tilde{y}(x)$ доставляет лок. экстремум функционалу $I[y]$,

то $\tilde{y}(x)$ удовл. ур-ию

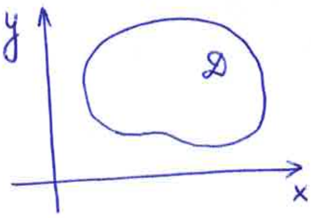
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}-\ldots+(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}=0$$ уравнение Эйлера-Пуассона

§9. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными

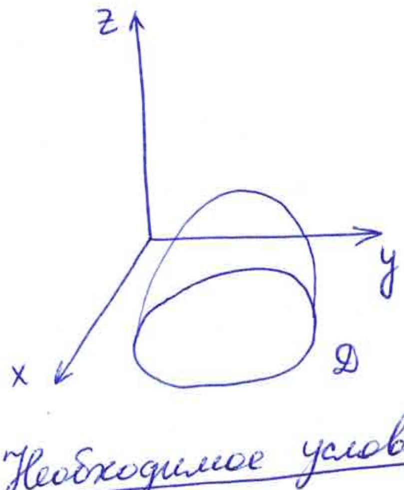
$z=z(x,y)-?$

$$I[z]=\iint\limits_{D}F(x,y,z,z_x,z_y)\,dx\,dy\to extr$$

$$z\big|_{(x,y)\in\partial D}=\varphi(x,y)$$



Пример



Найти поверхность, площадь которой будет минимальна.

Необходимое условие

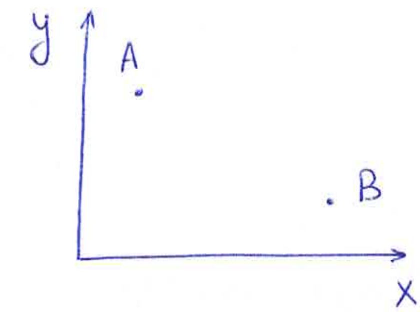
Если $\tilde{z}(x,y)$ доставляет лок. экстремум ф-лу $I[z]$, то $\tilde{z}(x,y)$ удовл. ур-ию

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}=0$$ уравнение Эйлера-Остроградского

Эйлер доказал это условие, когда D-прямоугольник,

Остроградский, когда D-произвольное множество.

10. Основной вариационный принцип механики (принцип Гамильтона – Остроградского, принцип наименьшего действия)



Функционал действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\,dt$$

T - кин. энергия

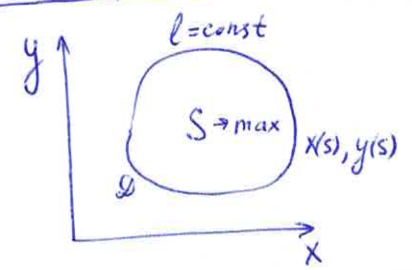
U - потенц. энергия

Точка будет двигаться так, чтобы ф-л действие принимал экстремальное значение.

$L = T - U$ лагранжиан

Необх. усл.: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$

§11. Изопериметрические задачи. Задача Дидоны



Задача Дидоны

$S \to \max$ S - площадь

$l = const$ l - длина

$$S = \iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\,dx\,dy$$

Формула Грина

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial \mathcal{D}} P\,dx + Q\,dy$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \overset{Q}{x}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{-P}{y}}{\partial y}\right) dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial \mathcal{D}} (-y\,dx + x\,dy) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} (-y x'_s + x y'_s)\,ds$$

Задача Дидоны

$x(s), y(s)$ - ?

$$\begin{cases} S[x,y] = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} (-y x'_s + x y'_s)\,ds \to \max \\ l[x,y] = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(x'_s)^2 + (y'_s)^2}\,ds = l = const \end{cases}$$

Простейшая изопериметрическая задача

$y(x)$ - ?

$$\begin{cases} I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to extr \\ J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')\,dx = const \\ y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Необходимое условие

Если $\tilde{y}(x)$ доставляет лок. экстремум ф-лу $I[y]$ при условии $J[y] = const$ и не является экстремалью ф-ла $J[y]$, то

$\tilde{y}(x)$ дост. лок. экстремум ф-лу

$$I_1[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} (F + \lambda G)\,dx \quad \text{для нек. } \lambda$$

$\Rightarrow \tilde{y}(x)$ - реш. ур-ие Эйлера

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'} = 0$$

Решение задачи Дидоны

$$I_1[x,y] = \int\limits_{s_1}^{s_2} \underbrace{\left(\frac{-yx' + xy'}{2} + \lambda\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right)}_{\tilde{F} = F + \lambda G} ds$$

$\tilde{x}, \tilde{y}$ доставляет лок. максимум $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{2} - \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{y}{2} + \lambda\dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right) = 0 \\ -\dfrac{x'}{2} - \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{x}{2} + \lambda\dfrac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - c_2 = \dfrac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} \\ -x + c_1 = \dfrac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} \end{cases} \left|\begin{matrix} (\ )^2 \\ + \\ (\ )^2 \end{matrix}\right. \Rightarrow (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2$$

Длина окружности $l = 2\pi\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{l}{2\pi}$

$$\Rightarrow (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

§12. Достаточные условия локального экстремума

$y(x)$ - ?

$$\begin{cases} I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \to extr \\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Утв.

Функция $\tilde{y}(x)$ доставляет лок. минимум (максимум) ф-лу $I[y]$, если

1) $\tilde{y}(x)$ удовл. ур-ию Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

2) $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall y\ \ \sup\limits_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} > 0}_{\text{минимум}} \quad \underbrace{(< 0)}_{\text{максимум}}$$

3) все решение $h(x)$ $(h \not\equiv 0)$ диф. ур

$$\begin{cases} \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right) h - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'} h'\right) = 0 \\ h(x_1) = 0 \end{cases}$$

такие, что

$h(x) \neq 0$ при $x \in (x_1, x_2]$

Пример

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y')^2 - y^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$F(x, y, y') = (y')^2 - y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad -2y - 2y'' = 0 \qquad y'' + y = 0$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \Rightarrow y(x) = \sin x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = 2 > 0 \quad \Rightarrow y(x) = \sin x \text{ возможно минимум}$$

$$(-2 - 0)h - \frac{d}{dx}(2h') = 0 \qquad \begin{cases} h'' + h = 0 \\ h(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ & \Rightarrow h(x) = c_2 \sin x,\ c_2 \neq 0 \end{aligned}$$

$h(x) \neq 0$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow y(x) = \sin x$ доставляет лок. минимум.

$$\begin{cases} I[y] = \int\limits_0^{(5/2)\pi} \left((y')^2 - y^2\right) dx \\ y(0) = 0, \quad y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$y(x) = \sin x$

$$\begin{cases} h'' + h = 0 \\ h(0) = 0 \end{cases} \qquad h(x) = C_2 \sin x$$

Надо:

$h(x) \neq 0$ при $x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right]$

Нарушается 3 условие.

Ничего нельзя сказать про функцию $y(x) = \sin x$.

Лекция 4 (25 февраля 2020 г.)

Глава VII. Малые колебания. Периодические решения

§1. Малые колебания

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

$M, K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - постоянные матрицы

$M = M^T$, $K = K^T$

$M > 0$ - положительно определенная матрица, т.е. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \langle M\xi, \xi \rangle > 0$

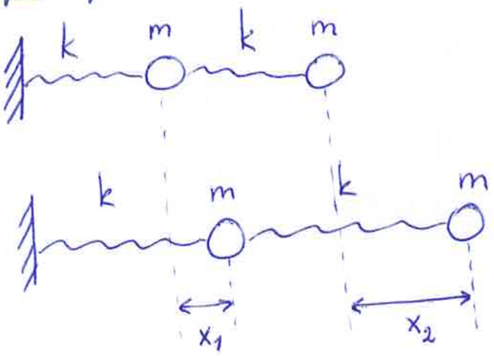
$K \geqslant 0$ - неотрицательно определенная матрица, т.е. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle K\xi, \xi \rangle \geqslant 0$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение

$M > 0 \Rightarrow \det M > 0$

Скалярное произведение: $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

Пример



$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,dt \to extr$$

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2}, \quad U = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2}$$

$$S[x_1, x_2] = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} - \frac{k(x_2-x_1)^2}{2}\right)}_{F} dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -kx_1 - k(x_1 - x_2) - \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}_1) = 0 \\ -k(x_2 - x_1) - \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}}_{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

Опр.
Корни полинома $\det(K-\lambda M)=0$ называются собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(Это собств. числа матрицы KM^{-1} или $M^{-1}K$) (ВНК)

Вектор $H \neq 0$ $(K-\lambda M)H=0$ наз. вектором нормальных колебаний.

$\Rightarrow KH = \lambda MH$

Домножим скалярно на H: $\underbrace{\langle KH, H\rangle}_{\geq 0} = \lambda \underbrace{\langle MH, H\rangle}_{>0}$

$$\lambda = \frac{\langle KH, H\rangle}{\langle MH, H\rangle} \geq 0$$

$\omega = \sqrt{\lambda}$ — собственная частота

Теорема (из алгебры)
Если M, K — вещественные симметричные матрицы, $M>0$, $K \geq 0$, то вектора $\{H_i\}_{i=1}^n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

$M\ddot{X} + KX = 0$

$H_1, \dots, H_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

Разложим $X(t)$ по базису: $X(t) = q_1(t)H_1 + \dots + q_n(t)H_n$

Подставляем в систему:

$$M\left(\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i H_i\right) + K\left(\sum_{i=1}^n q_i H_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i MH_i + \sum_{i=1}^n q_i KH_i = 0$$

$KH_i = \lambda_i MH_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i MH_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i MH_i = 0$

$$\sum_{i=1}^n (\ddot{q}_i + \lambda_i q_i) MH_i = 0$$

Т.к. $H_1, \dots, H_n$ — базис, $\det M \neq 0 \Rightarrow MH_1, \dots, MH_n$ — тоже базис

$\Rightarrow \ddot{q}_i + \lambda_i q_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Теорема
Если $X(t)$ — решение $M\ddot{X} + KX = 0$, тогда оно представимо в виде $X(t) = q_1(t)H_1 + \dots + q_n(t)H_n$, где $q_i(t)$ — решение $\ddot{q}_i + \lambda_i q_i = 0$

Следствие.

Т.к. $\lambda_i \geq 0$, то решение $\ddot{q}_i + \lambda_i q_i = 0$ имеет вид:

а) $\lambda_i = 0$, $\ddot{q}_i = 0 \Rightarrow q_i(t) = \tilde{c}_1^i t + \tilde{c}_2^i$

б) $\lambda_i > 0$, $\ddot{q}_i + \lambda_i q_i = 0$, $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \Rightarrow \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$

$$q_i(t) = c_1^i \cos(\omega_i t) + c_2^i \sin(\omega_i t)$$

Получаем $2n$ констант, их можно определить из нач. условий:

$$\begin{cases} X(t_0) = X_0 \\ \dot{X}(t_0) = V_0 \end{cases}$$

Лемма (об ортогональности векторов нормальных колебаний)

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \mapsto H_1$, $\lambda_2 \mapsto H_2$.

Тогда H_1 и H_2 будут M-ортогональны, т.е. $\langle MH_1, H_2 \rangle = 0$

Док-во:

$$\begin{cases} KH_1 = \lambda_1 MH_1 & \Big| \cdot H_2 \\ KH_2 = \lambda_2 MH_2 & \Big| \cdot H_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle KH_1, H_2 \rangle = \lambda_1 \langle MH_1, H_2 \rangle \\ \underbrace{\langle KH_2, H_1 \rangle}_{\substack{= \langle KH_1, H_2 \rangle \\ \text{т.к. } K = K^T}} = \lambda_2 \underbrace{\langle MH_2, H_1 \rangle}_{\substack{= \langle MH_1, H_2 \rangle \\ \text{т.к. } M = M^T}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle MH_1, H_2 \rangle \Rightarrow \langle MH_1, H_2 \rangle = 0$$

Лемма доказана.

Следствие.

Вектора H_1 и H_2 K-ортогональны.

Док-во: упр.

Замечание.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ кратное собств. число, тогда $\lambda \mapsto H_1, H_2 H_3$ – лин. нез. вектора нормальных колебаний. Методом ортогонализации Грама-Шмидта из них можно сделать M-ортогональные вектора норм. колебаний

$$\tilde{H}_1 = H_1$$

$$\tilde{H}_2 = H_2 - \frac{\langle M\tilde{H}_1, H_2 \rangle}{\langle M\tilde{H}_1, \tilde{H}_1 \rangle} \tilde{H}_1$$

$$\tilde{H}_3 = H_3 - \frac{\langle M\tilde{H}_1, H_3 \rangle}{\langle M\tilde{H}_1, \tilde{H}_1 \rangle} \tilde{H}_1 - \frac{\langle M\tilde{H}_2, H_3 \rangle}{\langle M\tilde{H}_2, \tilde{H}_2 \rangle} \tilde{H}_2$$

§2. Вынужденные колебание систем

$$M\ddot{X} + KX = F(t)$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$H_1, \dots, H_n$ - базис в $\mathbb{R}^n$, $H_1, \dots, H_n$ - M-ортогональные.

Ищем решение $X(t)$ в виде

$$X(t) = q_1(t) H_1 + \dots + q_n(t) H_n$$

Подставляем в систему:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{q}_i H_i\right) + K\left(\sum_{i=1}^{n} q_i H_i\right) = F(t)$$

$$KH_i = \lambda_i M H_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\ddot{q}_i + \lambda_i q_i) M H_i = F(t) \quad \Big| \cdot H_j$$

$$(\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1)\langle MH_1, H_j\rangle + \dots + (\ddot{q}_n + \lambda_n q_n)\langle MH_n, H_j\rangle = \langle F(t), H_j\rangle$$

$$(\ddot{q}_j + \lambda_j q_j)\langle MH_j, H_j\rangle = \langle F(t), H_j\rangle$$

Теорема

$X(t)$ - решение $M\ddot{X} + KX = F(t)$. Тогда $X(t) = q_1(t) H_1 + \dots + q_n(t) H_n$,

где $H_1, \dots, H_n$ - M-ортогональные вектора норм. колебаний,

$q_i(t)$ - решение $\ddot{q}_i + \lambda_i q_i = \dfrac{\langle F(t), H_i\rangle}{\langle MH_i, H_i\rangle}$

§3. Периодические решение

A. $y' = F(t, y)$ (1)

$F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $F, \dfrac{\partial F}{\partial y} \in C(\mathcal{D})$

$\mathcal{D}$ - открытое непустое мн-во, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$

$F(t+T, y) = F(t, y)$, T - период

$y(t+T) = y(t)$ - ?

Теорема (о периодическом решении системы)

$y(t)$ - T-периодическое решение системы (1) $\Leftrightarrow$ $y(0) = y(T)$.

Док-во:

$(\Rightarrow)$ очевидно

$(\Leftarrow)$

Имеем $y(0) = y(T) =: y_0$

$y(t)$-непродолжаемое решение системы $y' = F(t, y)$

Надо: $y(t+T) = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$y(t)$ – решение з. Коши: $\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Обозначим $\tilde{y}(t) = y(t+T)$ – тоже решение этой з. Коши

$\tilde{y}(0) = y(T) = y_0$

$\tilde{y}'(t) = y'(t+T) = F(t+T, y(t+T)) = F(t+T, \tilde{y}(t)) = F(t, \tilde{y}(t))$

$\Rightarrow$ по теореме Пикара $y(t) = \tilde{y}(t) = y(t+T)$.

$y(t)$ определена на (a, b)

$\Rightarrow y(t+T)$ определена на $(a-T, b-T)$

Т.к. $y(t) = y(t+T)$, то $y(t+T)$ определена на (a, b)

$\Rightarrow (a, b) = (a-T, b-T) \Rightarrow (a, b) = (-\infty, +\infty)$.

Теорема доказана.

Лекция 5 (3 марта 2020г.)

А. $y' = F(t, y)$ (1)

$F(t+T, y) = F(t, y)$

Теорема 1.

$y(t)$ – T-периодическая $\Leftrightarrow y(0) = y(T)$.

Б. $y' = A(t)y + B(t)$ (2)

$A \in C(\mathbb{R}),\ B \in C(\mathbb{R})$

$A(t+T) = A(t),\ B(t+T) = B(t)$

$y(t) = y(t+T)$ – ?

Теорема 2. (о периодич. решении лин. системы)

$\exists!$ T-периодич. решение сист. (2) $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$,

где $\Phi(t)$ – ФМР системы $y' = A(t)y$

Док-во:

Общее решение (2) имеет вид:

$$y(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds$$

$y(t)$ – T-периодич. $\Leftrightarrow y(0) = y(T)$

$$\Rightarrow \Phi(0)c = \Phi(T)c + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)ds$$

$$(\Phi(0) - \Phi(T))c = \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)ds$$

$\exists!\, c$, т.е. $\exists!$ T-периодич. решение $\Leftrightarrow \det(\Phi(0) - \Phi(T)) \neq 0$

Теорема доказана.

В. $y' = Ay + B(t)$ (3)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – пост. м-ца, $B(t) \in C(\mathbb{R})$, $B(t+T) = B(t)$

$y(t+T) = y(t)$ – ?

Теорема 3 (о периодич. решении лин. сист. с пост. коэф)

$\exists!$ T-периодич. решение сист. (3) $\Leftrightarrow$ для всех собств. чисел λ м-цы A вып. $e^{\lambda T} \neq 1$.

Док-во:

$\exists!$ T-периодич. реш. (3) $\Leftrightarrow \det(\Phi(0) - \Phi(T)) \neq 0$

$\Phi(t)$ – ФМР $y' = Ay$ $\Rightarrow$ можно взять $\Phi(t) = e^{tA}$

$\Rightarrow \det(e^{TA} - E) \neq 0$,

т.е. м-ца e^{TA} не имеет собств. чисел, равных 1.

Если λ-собств. число м-цы A, то $e^{\lambda T}$-собств. число м-цы e^{TA}

$\Rightarrow e^{\lambda_j T} \neq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собств. числа м-цы A.

Теорема доказана.

A*. $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (4)

$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C(\mathcal{D})$

$f(t+T, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$y(t+T) = y(t)$ - ?

<u>Теорема 1*.</u>

$y(t)$ - T-периодическое решение (4) $\Leftrightarrow y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$, ...,

$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(T)$.

Док-во:

1 способ. Аналогично теореме 1

2 способ. Сведение к системе и применение теоремы 1.

Сведем ур. (4) к системе:

$$\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{y}' = F(t, \mathrm{y}) \\ F(t+T, \mathrm{y}) = F(t, \mathrm{y}) \end{array}$$

Решение сист. $\mathrm{y}' = F(t, \mathrm{y})$ T-периодично $\Leftrightarrow \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}(T)$

$\Leftrightarrow y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$, ..., $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}(T)$

Теорема доказана.

Б*. $y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y = b(t)$ (5)

$a_i(t), b(t) \in C(\mathbb{R})$, $a_j(t+T) = a_j(t)$, $b(t+T) = b(t)$.

$y(t+T) = y(t)$ - ?

<u>Теорема 2*.</u> (о периодич. реш. лин. ур. выс. порядка)

$\exists!$ T-периодич. решение (5) $\Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$,

где $\Phi(t)$ - ФМР лин. ур. $y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y = 0$.

Док-во:

Сведем ур-ие (5) к системе:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \qquad (5^*)$$

Если $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ – ФСР для ур. (5), тогда ФМР для ур. (5):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$\Phi(t)$ – ФМР для сист $Y' = A(t)Y$

$\exists!$ T-периодич. реш. (5) $\Leftrightarrow \exists!$ T-периодич. реш. $(5^*) \Leftrightarrow \det(\Phi(T) - \Phi(0)) \neq 0$

Теорема доказана.

В*. $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t) \quad (6)$

$a_j = const$, $b(t) \in C(\mathbb{R})$, $b(t+T) = b(t)$

Теорема 3*. (о периодич. реш. лин. ур. выс. пор. с пост. коэф.)

$\exists!$ T-периодич. реш. ур. (6) $\Leftrightarrow$ все корни хар. полинома

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ такие, что $e^{\lambda T} \neq 1$.

Док-во:

сведем ур. (6) к системе $Y' = AY + B(t)$. (6^*)

$\exists!$ T-периодич. реш. (6) $\Leftrightarrow \exists!$ T-периодич. реш. (6^*)

Из теоремы 3 $\exists!$ T-периодич. реш. (6)

$\Leftrightarrow e^{\lambda T} \neq 1$, где λ – собств. числа м-цы A

Корни $\det(A - \lambda E) = 0$ – это корни $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$.

Теорема доказана.

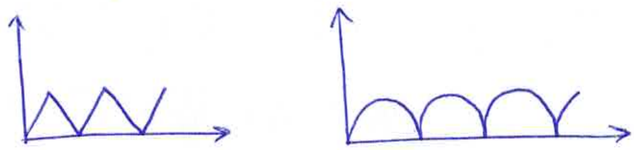
§4. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье

$$\ddot{y}+\omega^2 y = f(t) \qquad (7)$$

$y=y(t)$, $\omega^2 \geqslant 0$, $f(t)=f(t+2\pi)$, $f\in C(\mathbb{R})$

Утв. (функц. анализ)

Если 2π-периодич. ф-ия $g(t)$ — непр., $g'(t)$ — кусочно-непрерывна, то ее ряд Фурье равномерно сх-ся к $g(t)$.



f — непр., f' — кус.-непр. $\Rightarrow$ раскладываем f в ряд Фурье:

$$(8)\quad f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\ ,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

Если $y(t)$ — 2π-периодич. реш., то

$$(9)\quad y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

Лемма.

Если $y(t)$ — 2π-периодич. решение, тогда

$$\begin{cases} a_n(\omega^2-n^2)=A_n \\ b_n(\omega^2-n^2)=B_n \end{cases} \qquad (10)$$

Док-во:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)\right)\cos nt\,dt=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\dot{y}(t)\cdot\cos nt\,\Big|_0^{2\pi}}_{=0}+\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi}\dot{y}(t)\sin nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^2 y(t)\cos nt\,dt=$$

$$=\underbrace{\frac{n}{\pi}y(t)\sin nt\,\Big|_0^{2\pi}}_{=0}-\frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\cos nt\,dt+\frac{\omega^2}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\cos nt\,dt=$$

$$=\frac{\omega^2-n^2}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\cos nt\,dt=(\omega^2-n^2)a_n.$$

Аналогично, $B_n=(\omega^2-n^2)b_n$.

Лемма доказана.

<u>Теорема</u> (нерезонансный случай)

Если ω - нецелое, тогда $\forall$ 2π-периодич. $f(t)$ $\exists!$ 2π-периодич. реш.

$\ddot{y}+\omega^2 y = f(t)$,

представимое равномерно сходящимся рядом Фурье, (9)

где a_n, b_n из (10).

Док-во: $e^{\pm 2\pi\omega i} \neq 1 \Rightarrow \exists!$ 2π-периодич. реш.

$$a_n = \underline{(\omega^2-n^2)^{-1}}\, A_n \quad , \quad b_n = \frac{B_n}{\omega^2-n^2}$$

$y(t) \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ряд Фурье для $y(t)$ равн. сх-ся.

Теорема доказана.

<u>Теорема</u> (резонансный случай)

Пусть $\omega = m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Тогда

1) $A_m \neq 0$ или $B_m \neq 0 \Rightarrow$ не сущ. 2π-периодич. решений

2) $A_m = B_m = 0 \Rightarrow$ сущ. беск. число 2π-периодич. решений,

представимые рядом (9), где a_n, b_n при $n \neq m$ из (10),

a_m, b_m - произвольные. (любое решение (7) - 2π-периодическое)

Док-во:

1) $a_m(m^2-m^2) = A_m \neq 0$. Противоречие

$\Rightarrow$ не сущ. 2π-периодич. решений

2) $A_m = B_m = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \quad , \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0$$

Все решения $\ddot{y}+\overset{m^2}{\overset{\shortparallel}{\omega^2}} y = f(t)$:

$$y(t) = c_1\cos mt + c_2\sin mt - \frac{1}{m}\int_0^t f(s)\sin ms\,ds\cdot\cos mt +$$

$$+\frac{1}{m}\int_0^t f(s)\cos ms\,ds\cdot\sin mt$$

Надо: $y(t)$ - 2π-периодич. решение для произв. c_1 и c_2.

Надо убедиться, что $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$ $\forall c_1, c_2$.

Если $A_m = B_m$, то это так.

Теорема доказана.

Лекция 6 (10 марта 2020г.)

Глава VIII. Зависимость решений от начальных данных и параметров

§1. Гладкость решений диф. ур.

(1) $y' = F(t, y)$, $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$y = y(t)$

Теорема (о гладкости решений)

Если $F \in C^k(\mathcal{D})$, то решение $y(t)$ – класса гладкости C^{k+1}.

Док-во:

Сразу: $y(t) \in C(\alpha, \omega)$

Имеем: $F \in C(\mathcal{D})$, надо: $y \in C^1(\alpha, \omega)$

$F(t, y) \in C(\mathcal{D})$, $y \in C(\alpha, \omega) \Rightarrow F(t, y(t)) \in C(\alpha, \omega) \overset{(1)}{\Rightarrow} y'(t) \in C(\alpha, \omega)$

$\Rightarrow y(t) \in C^1(\alpha, \omega)$.

Т.к. $F \in C^1(\mathcal{D})$, $y \in C^1(\alpha, \omega) \Rightarrow F(t, y(t)) \in C^1(\alpha, \omega) \overset{(1)}{\Rightarrow} y'(t) \in C^1(\alpha, \omega)$

$\Rightarrow y(t) \in C^2(\alpha, \omega)$

Имеем: $F \in C^2(\mathcal{D})$. Надо: $y(t) \in C^3(\alpha, \omega)$.

$F \in C^2$, $y(t) \in C^2(\alpha, \omega) \Rightarrow F(t, y(t)) \in C^2(\alpha, \omega) \overset{(1)}{\Rightarrow} y'(t) \in C^2(\alpha, \omega)$

$\Rightarrow y(t) \in C^3(\alpha, \omega)$

И т.д. по индукции $\forall k$.

Теорема доказана.

§2. Непрерывная зависимость от параметров

$y' = F(t, y, \mu)$

~~$y|_{t=t_0}$~~

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$

$$y = y(t, \mu) = \begin{pmatrix} y_1(t, \mu_1, \dots, \mu_l) \\ \vdots \\ y_n(t, \mu_1, \dots, \mu_l) \end{pmatrix}$$

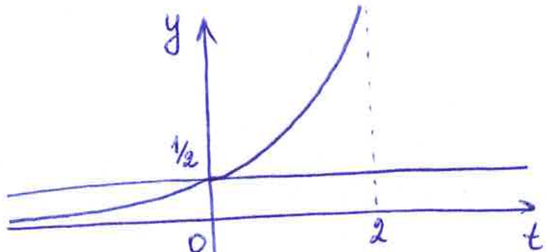
$F: B \to \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^{1+n+l}$

Пример

$$\begin{cases} y' = -\mu y + y^2 \\ y|_{t=0} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad n=1, \ l=1$$

$$\mu = 0: \begin{cases} y' = y^2 \\ y|_{t=0} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad y(t) = \frac{1}{2-t}, \ t \in (-\infty, 2)$$

$$\mu = \frac{1}{2}: \begin{cases} y' = y(y-\frac{1}{2}) \\ y|_{t=0} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad y(t) = \frac{1}{2}, \ t \in (-\infty, +\infty)$$



Теорема (о непрерывной зависимости от параметра)

Фикс. точку $(t_0, y_0, \mu_0) \in B$

Рассм. задачу Коши $\begin{cases} y' = F(t, y, \mu_0) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$. Пусть $F, \frac{\partial F}{\partial y} \in C(B)$

Решение з. Коши $y(t, \mu_0)$ - непродолжаемое, определено на интервале $(\alpha(\mu_0), \omega(\mu_0))$

Возьмем произв. отрезок $[t_1, t_2] \subset (\alpha(\mu_0), \omega(\mu_0))$

Тогда $\exists \Delta > 0$: для всех μ : $|\mu - \mu_0| < \Delta$ решение $y(t, \mu)$ задачи Коши $\begin{cases} y' = F(t, y, \mu) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$ тоже будет определено на интервале $[t_1, t_2]$.

Кроме того,

$$\|y(t, \mu) - y(t, \mu_0)\| \xrightarrow[\|\mu - \mu_0\| \to 0]{} 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Пример

$$\begin{cases} y' = \mu y^2 \\ y|_{t=0} = 1 \end{cases} \qquad n=1, \ l=1$$

$$y(t, \mu) = \begin{cases} 0, \ t \in \mathbb{R}, \text{ если } \mu = 0 \\ \frac{1}{1 - t\mu}, \ t \in (-\infty, \frac{1}{\mu}), \ \mu > 0 \\ \frac{1}{1 - t\mu}, \ t \in (\frac{1}{\mu}, +\infty), \ \mu < 0 \end{cases}$$

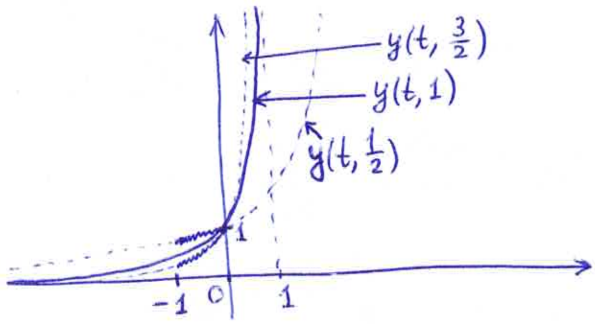
Фикс. $(t_0, y_0, \mu_0) = (0, 1, 1)$:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y|_{t=0} = 1 \end{cases} \quad y(t,1) = \frac{1}{1-t}, \ t \in (-\infty, 1)$$

Возьмем $[t_1, t_2] = [-1, 0]$

Возьмем $\Delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall \mu : |\mu - 1| < \frac{1}{2}$ $y(t,\mu)$ опр-но на интервале $[-1, 0]$.

$\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{2}$

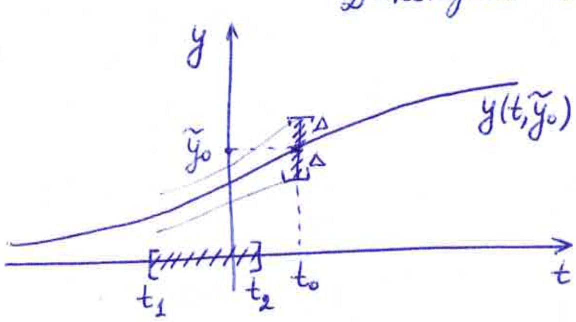


$$y(t, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}t}$$
$$y(t, \tfrac{3}{2}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}t}$$

$$|y(t,\mu) - y(t,1)| \xrightarrow[\mu \to 1]{} 0, \ t \in [-1, 0]$$

§3. Непрерывная зависимость решений от нач. данных

$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$ $F: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{D}$ - непустое открытое. $y(t, y_0)$ - реш. з. Коши



Теорема (о непрерывной зависимости от начальных данных)

Пусть $F, \frac{\partial F}{\partial y} \in C(\mathcal{D})$. Фиксируем $(t_0, \tilde{y}_0) \in \mathcal{D}$

$y(t, \tilde{y}_0)$ - решение з. Коши $\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y|_{t=t_0} = \tilde{y}_0 \end{cases}$

$y(t, \tilde{y}_0)$ определено на (α, ω).

Выберем отрезок $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \omega)$

Тогда $\exists \Delta > 0$ такое, что для всех y_0 : $\|y_0 - \tilde{y}_0\| < \Delta$

$\Rightarrow$ решение $y(t, y_0)$ задачи Коши $\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$

определено на $[t_1, t_2]$.

При этом $\|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)\| \xrightarrow[\|y_0 - \tilde{y}_0\| \to 0]{} 0$, $t \in [t_1, t_2]$.

§4. Дифференцируемость решений по параметру и начальным данным

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \mu) \\ y|_{t=t_0} = y_0(\mu) \end{cases}$$

$f: B \to \mathbb{R}$

$B \subset \mathbb{R}^3$ - непустое открытое множество

μ_0 - фикс.

$$y(t, \mu) = y(t, \mu_0) + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu_0) \cdot (\mu - \mu_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu_0) \cdot (\mu - \mu_0)^2 + \ldots$$

Фикс. точку $(t_0, y_0, \mu_0) \in B$.

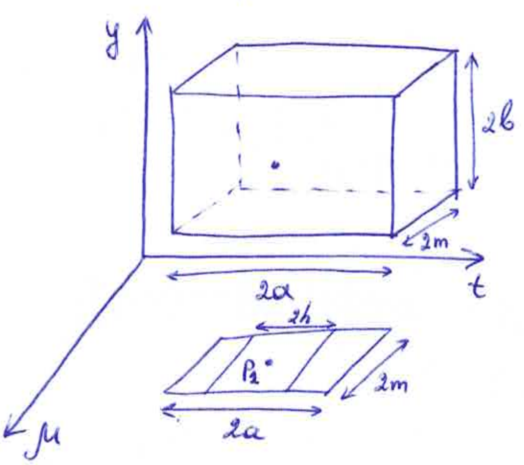
Обозначим P - параллелепипед в B - замкнутая окрестность точки (t_0, y_0, μ_0) :

$$P = \{(t, y, \mu) : |t - t_0| \le a, \ |y - y_0| \le b, \ |\mu - \mu_0| \le m\}$$

B - открытое $\Rightarrow$ подберем a, b, m так, чтобы $P \subset B$.

$$F = \max_P |f(t, y, \mu)|$$

$$h = \min\{a, \frac{b}{F}\}$$



Обозначим

$$P_1 = \{(t, \mu) : |t - t_0| \le h, \ |\mu - \mu_0| \le m\}$$

Теорема (о дифференцируемости решения по параметрам и начальным данным)

Если $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(P)$, $y_0(\mu) \in C^1(|\mu-\mu_0|<m)$.

Тогда

1) решение з. Коши $\begin{cases} y' = f(t,y,\mu) \\ y|_{t=t_0} = y_0(\mu) \end{cases}$ существует и непр.: $y(t,\mu) \in C(P_1)$

2) $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu} \in C(P_1)$

3) $\exists \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \mu} \in C(P_1)$

4) Функция $v(t,\mu) = \frac{\partial y}{\partial \mu}$ – решение з. Коши

$$\begin{cases} v'_t = \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ v|_{t=t_0} = \frac{\partial y_0(\mu)}{\partial \mu} \end{cases}$$

$$y(t,\mu) = y(t,\mu_0) + v(t,\mu_0)\cdot(\mu-\mu_0) + o(\mu-\mu_0)$$

Пример

$$\begin{cases} y' = 4\mu t - y^2 \\ y|_{t=1} = \mu+1 \end{cases}$$

Найти реш. в окр-сти $\mu=0$.

$f(t,y,\mu) = 4\mu t - y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$y_0(\mu) = \mu+1 \in C^\infty(\mathbb{R})$

$y(t,\mu) = y(t,0) + \frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0)\cdot\mu + o(\mu)$

$y(t,0)$ – решение $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y|_{t=1} = 1 \end{cases}$ $\quad y(t,0) = \frac{1}{t}$

$v(t,\mu) = \frac{\partial y}{\partial \mu}$ – реш. з. Коши : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \mu} = 4t - 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{t=1} = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} v'_t = 4t - 2y(t,\mu)\cdot v \\ v|_{t=1} = 1 \end{cases}$$

Надо: $\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,0) = u(t)$

$$\begin{cases} u' = 4t - 2y(t,0)\cdot u \\ u|_{t=1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = 4t - \frac{2}{t}u \\ u|_{t=1} = 1 \end{cases} \qquad u(t) = t^2$$

$$\Rightarrow y(t,\mu) = \frac{1}{t} + t^2\mu + o(\mu)$$

2 способ

$y(t,\mu) = \omega_0(t) + \omega_1(t)\mu + o(\mu)$

Подставляем $y(t,\mu)$ в задачу Коши и приравниваем функции при одинаковых степенях μ.

Лекция 7 (17 марта 2020 г.)

§5. Метод малого параметра для отыскания периодических решений

Теорема о неявной функции

~~$g_1(\beta, \mu_1, \mu_2) = 0$~~

~~$g_2(\beta, \mu$~~

$$\begin{cases} g_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \\ g_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \end{cases}$$

1) $g_1(0,0,0) = 0$, $g_2(0,0,0) = 0$

2) $g_i \in C^1$ по всем аргументам в окр. точки $(0,0,0)$

3) $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}\right)\Big|_{(\beta_1, \beta_2, \mu) = (0,0,0)} \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall \mu : |\mu| < \delta$ $\exists !$ ф-ии $\beta_1(\mu), \beta_2(\mu)$ класса C^1 такие, что

$$\begin{cases} g_1(\beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \mu) = 0 \\ g_2(\beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \mu) = 0 \end{cases}$$

$\beta_1(\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0$, $\beta_2(\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0$.

Рассм. диф. ур.

$y'' = f(t, y, y', \mu)$, $f(t+T, y, y', \mu) = f(t, y, y', \mu)$

$y = y(t, \mu)$ – ?

$f : B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^4$

$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(B)$

Известно: $\varphi(t) = y(t, 0)$ – T-периодич. решение (при $\mu = 0$)

Если $\mu \approx 0$, будут ли периодич. решения?

$y'' = f(t, y, y')$, $f(t+T, y, y') = f(t, y, y')$

Теорема

$y(t)$ – T-периодическое $\Leftrightarrow$ $y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$

$\varphi(t) = y(t, 0)$ – реш. $\begin{cases} y'' = f(t, y, y', 0) \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$

Рассмотрим $\mu \neq 0$:

$y(t,\mu)$ - решение з. Коши $\begin{cases} y'' = f(t,y,y',\mu) \\ y(0) = \varphi(0) + \beta_1 \\ y'(0) = \varphi'(0) + \beta_2 \end{cases}$

Обозначим реш. этой з. Коши через $y(t,\beta_1,\beta_2,\mu)$.

В частности, $y(t,0,0,0) = \varphi(t)$ - T-периодич. решение

Т.к. $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(B)$, то 1) $y \in C^2$ по переменной t,

2) $\frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \beta_1}, \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \in C$

$\Rightarrow y \in C^1$ по всем аргументам,

$y \in C^2$ по переменной t.

$y(t,\beta_1,\beta_2,\mu)$ - T-периодич. решение $\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{y(0,\beta_1,\beta_2,\mu) - y(T,\beta_1,\beta_2,\mu)}^{\Phi_1(\beta_1,\beta_2,\mu)} = 0 \\ \underbrace{y'_t(0,\beta_1,\beta_2,\mu) - y'_t(T,\beta_1,\beta_2,\mu)}_{\Phi_2(\beta_1,\beta_2,\mu)} = 0 \end{cases}$

Теорема (о существовании T-периодич. решение при малом параметре μ)

Пусть $\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_j}\right)\Big|_{(\beta_1,\beta_2,\mu)=(0,0,0)} \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall \mu : |\mu| < \delta \Rightarrow \exists!$ T-периодич. реш. $y'' = f(t,y,y',\mu)$,

реш. $y(t,\mu)$. При этом $y(t,\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} \varphi(t)$.

$\varphi(t)$ - T-периодич. реш. $y'' = f(t,y,y',0)$

Док-во:

Вып. усл. теор. о неявной ф-ии:

1) $\begin{cases} \Phi_1(0,0,0) = y(0,0,0,0) - y(T,0,0,0) = \varphi(0) - \varphi(T) = 0 \\ \Phi_2(0,0,0) = y'_t(0,0,0,0) - y'_t(T,0,0,0) = \varphi'(0) - \varphi'(T) = 0 \end{cases}$

2) $\Phi_1, \Phi_2 \in C^1$ по всем аргументам

3) $\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_j}\right)\Big|_{(\beta_1,\beta_2,\mu)=(0,0,0)} \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall \mu : |\mu| < \delta \ \exists! \ \beta_1(\mu), \beta_2(\mu)$ класса C^1:

$\begin{cases} \Phi_1(\beta_1(\mu),\beta_2(\mu),\mu) = 0 \\ \Phi_2(\beta_1(\mu),\beta_2(\mu),\mu) = 0 \end{cases}, \ \beta_i(\mu) \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0$

Зафикс. μ^* : $|\mu^*| < \delta \Rightarrow \exists!\ \beta_1(\mu^*), \beta_2(\mu^*)$: реш. з. Коши

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y', \mu^*) \\ y(0) = \varphi(0) + \beta_1(\mu^*) \\ y'(0) = \varphi'(0) + \beta_2(\mu^*) \end{cases}$$ будет T-периодическим

$\Rightarrow$ у ур-ие $y'' = f(t, y, y', \mu^*)$ сущ. T-периодич. решение.

Теорема доказана.

Пример

$y'' + \omega^2 y = f(t) + \mu \cdot g(t, y, y', \mu)$

ω - нецелое, $f \in C(\mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^4)$

$f(t + 2\pi) = f(t)$, $g(t + 2\pi, y, y', \mu) = g(t, y, y', \mu)$

Если $\mu \approx 0$, сущ. ли периодич. реш. с периодом 2π?

Пусть $\mu = 0$: $y'' + \omega^2 y = f(t)$, ω - нецелое

$e^{\lambda T} = e^{\pm i\omega \cdot 2\pi} \neq 1 \Rightarrow \exists!$ 2π-периодич. реш. $\varphi(t)$

Надо проверить $\det\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j}\right)\Big|_{(\beta_1, \beta_2, \mu) = (0,0,0)} \neq 0.$

$y(t, \mu)$ - реш. з. Коши

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t) + \mu \cdot g(t, y, y', \mu) \\ y(0) = \varphi(0) + \beta_1 \\ y'(0) = \varphi'(0) + \beta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(\beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) = y(0, \beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) - y(2\pi, \beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) \\ \varphi_2(\beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) = y'_t(0, \beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) - y'_t(2\pi, \beta_1, \beta_2, \overset{=0}{\mu}) \end{cases}$$

$y(t, \beta_1, \beta_2, 0)$ - реш. з. Коши $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t) \\ y(0) = \varphi(0) + \beta_1 \\ y'(0) = \varphi'(0) + \beta_2 \end{cases}$

$\varphi(t)$ - реш. з. Коши $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t) \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$

$y(t, \beta_1, \beta_2, 0) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \varphi(t)$ – реш. диф. ур. $y'' + \omega^2 y = f(t)$

Из нач. условий:

$$\begin{cases} C_1 + \varphi(0) = \cancel{C_1 + \beta}\ \varphi(0) + \beta_1 & \Rightarrow C_1 = \beta_1 \\ C_2\omega + \varphi'(0) = \varphi'(0) + \beta_2 & \Rightarrow C_2 = \dfrac{\beta_2}{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t, \beta_1, \beta_2, 0) = \beta_1 \cos\omega t + \frac{\beta_2}{\omega} \sin\omega t + \varphi(t)$$

$$\begin{cases} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, 0) = \beta_1 + \underline{\varphi(0)} - \left[\beta_1 \cos(2\pi\omega) + \dfrac{\beta_2}{\omega} \sin(2\pi\omega) + \underline{\varphi(2\pi)}\right] \\ \Phi_2(\beta_1, \beta_2, 0) = \beta_2 + \underline{\underline{\varphi'(0)}} - \left[-\beta_1\omega \sin(2\pi\omega) + \beta_2 \cos(2\pi\omega) + \underline{\underline{\varphi'(2\pi)}}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, 0) = \beta_1(1 - \cos(2\pi\omega)) - \dfrac{\beta_2}{\omega} \sin(2\pi\omega) \\ \Phi_2(\beta_1, \beta_2, 0) = \beta_1\omega \sin(2\pi\omega) + \beta_2(1 - \cos(2\pi\omega)) \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial \beta_j} = \det\begin{pmatrix} 1-\cos(2\pi\omega) & -\frac{1}{\omega}\sin(2\pi\omega) \\ \omega\sin(2\pi\omega) & 1-\cos(2\pi\omega) \end{pmatrix} = (1-\cos(2\pi\omega))^2 + \sin^2(2\pi\omega) \neq 0,$$

т. к. ω – нецелое

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall \mu : |\mu| < \delta \Rightarrow \exists!$ 2π-периодич. реш. ур-ия

$$y'' + \omega^2 y = f(t) + \mu g(t, y, y', \mu)$$

Устойчивость

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$\varphi(t)$ – реш. $\Rightarrow$ оно либо устойчиво, либо неустойчиво.